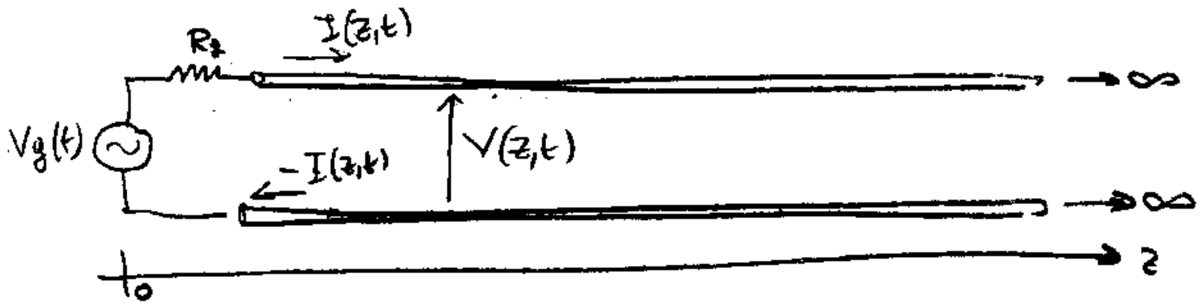
LINEE DI TRASMISSIONE

La linea di trasmissione può essere considerata come un semplice ed efficace modello matematico in grado di descrivere una gran varietà di fenomeni di propagazione guidata ma anche nello spazio libero quali l'onda piana, l'irradiamento dei alcuni tipi di antenne, le guide d'onda di qualunque sezione ed infine proprio la linea a due conduttori, dalla quale parte questa lezione.

Le equazioni che governano la propagazione (guidata) lungo una direzione possono essere dedotte a partire da considerazioni circuitali senza richiedere una soluzione diretta delle equazioni di Maxwell, che è comunque necessaria per definire le costanti fisiche che governano tali equazioni.

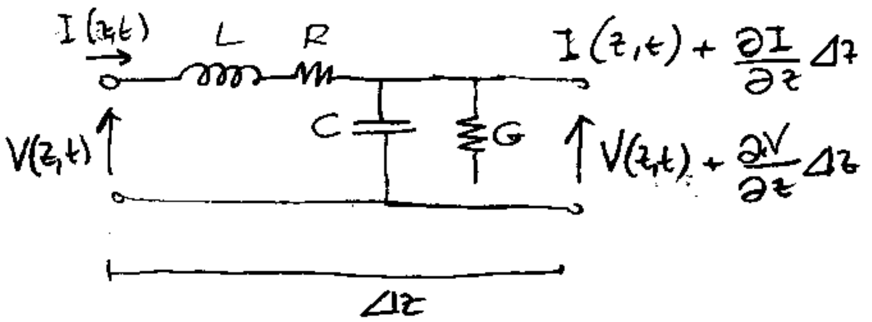
Si consideri un sistema costituito da due conduttori rettilinei paralleli connessi ad un generatore reale di tensione e che si estendono all'infinito



Il generatore impone una differenza di potenziale tra i due conduttori, che sarà variabile con t ed inoltre ecciterà una corrente $I(t)$ sul conduttore superiore e $-I(t)$ sul conduttore inferiore in modo che le correnti si chiudano sul generatore.
Anche se i due conduttori vanno all'infinito, la corrente si richiude localmente tra i due conduttori per effetto della capacità per unità di lunghezza C che si stabilisce tra di essi. Quindi ci sarà una corrente di spostamento tra i due conduttori.

La presenza della corrente su ciascun conduttore genererà un campo magnetico che potrà essere tenuto in conto tramite una induttanza per unità di lunghezza.

Quindi la generica sezione Δz della linea può essere modellata con il seguente circuito a costanti distribuite



L R C G
grandezze per unità di lunghezza

Dove si è tenuto conto anche della eventuale presenza di perdite nei conduttori, tramite la resistenza R per unità di lunghezza, e delle perdite del dielettrico eventualmente frapposto tra i conduttori, tramite una conduttanza per unità di lunghezza G — (passaggio di correnti di conduzione trasversali)

Dette $\frac{\partial V}{\partial z}$ e $\frac{\partial I}{\partial z}$ il tasso di variazione spaziale di tensione e corrente si possono applicare le leggi di Kirchhoff al tratto Δz

→ variazione di tensione lungo Δz $= \frac{\partial V}{\partial z}\Delta z = -(L\Delta z)\frac{\partial I}{\partial t} - R\Delta z I$

induttanza del tratto Δz

→ variazione di corrente lungo Δz $= \frac{\partial I}{\partial z}\Delta z = -C\Delta z\frac{\partial V}{\partial t} - G\Delta z V$

cancellando Δz si ottengono le seguenti equazioni

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial z} = -L\frac{\partial V}{\partial t} - RI \\ \frac{\partial I}{\partial z} = -C\frac{\partial V}{\partial t} - GV \end{cases}$$

Descrivono con relazioni incrociate le dipendenze spaziali e temporali di tensione e corrente lungo la linea

Consideriamo per ora il caso semplificato di assenza di perdite $R=0$ $G=0$

$$\begin{cases} \frac{\partial V}{\partial t} = -L\frac{\partial I}{\partial t} \\ \frac{\partial I}{\partial z} = -C\frac{\partial V}{\partial t} \end{cases}$$

questo sistema di equazioni è del tutto analogo a quello che descrive la propagazione lungo z di un'onda piana di componenti

in un mezzo omogeneo

$E_x \rightleftarrows V$ $\quad L \rightleftarrows \mu$

$H_y \rightleftarrows I$ $\quad C \rightleftarrows \varepsilon$

quindi il formalismo delle linee di TX è utile per descrivere la propagazione di onde piane ⇐

Eliminiamo una variabile derivando una delle due equazioni rispetto allo spazio, e l'altra rispetto al tempo

$$\frac{\partial^2}{\partial z^2} V = -L \frac{\partial^2 I}{\partial z \, \partial t}$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t \, \partial z} I = -C \frac{\partial^2 V}{\partial z^2}$$

Assumendo che V ed I siano funzioni continue, le derivate miste sono uguali e quindi

$$\boxed{\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = \underbrace{LC}_{\frac{1}{v^2}} \frac{\partial^2 V}{\partial t^2}}$$

Equazione dei Telegrafisti

$\sqrt{\frac{1}{LC}} = v$ ha dimensioni di una velocità

Idem per la corrente

$$\boxed{\frac{\partial^2 I}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2} \frac{\partial^2 I}{\partial t^2}}$$

infatti $\rightarrow$ fine

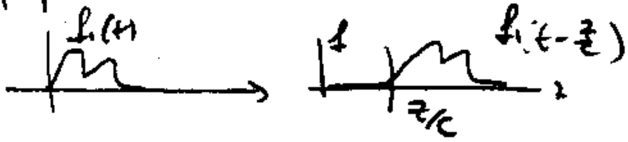
Hanno chiaramente la stessa forma delle equazioni delle onde e ammettono soluzioni viaggianti del tipo

$$V(z,t) = f_1\left(t - \frac{z}{v}\right) + f_2\left(t + \frac{z}{v}\right)$$

con f_1 e f_2 funzioni arbitrarie

Basta sostituire tale funzione dentro l'equazione dei telegrafisti

I valori assunti dalla funzione $f_1\left(t - \frac{z}{v}\right)$ sono gli stessi di quelli della funzione $f_1(t)$ ma ritardati nel tempo di una quantità $\frac{z}{v}$. Quindi f_1 descrive un'onda che si propaga nel verso $z+$ con velocità v



il segnale quindi non si deforma (non c'è dispersione)

$f_2\left(t+\frac{z}{v}\right)$ descrive un'onda che si propaga in z^- con velocità v.

La soluzione generale per la tensione sarà pertanto

$$V(z,t) = V^+ f^+\left(t-\frac{z}{v}\right) + V^- f^-\left(t+\frac{z}{v}\right)$$

+, −
per meglio
chiarire il
verso di propag.

ampiezze costanti
di onde progressive
e regressive
(dipendenti dalle condizioni al contorno)

Regime Sinusoidale

$$v(z,t) = \mathrm{Re}\left(V(z)\, e^{j\omega t}\right) \qquad V(z),\, I(z) \in \mathbb{C}$$

$$i(z,t) = \mathrm{Re}\left(I(z)\, e^{j\omega t}\right)$$

L'equazione dei telegrafisti diventa

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = LC\,\frac{\partial^2 V}{\partial t^2} \Longrightarrow \begin{cases} \dfrac{d^2 V(z)}{dz^2} = -\omega^2 LC\, V(z) \\[2ex] \dfrac{d^2 I(z)}{dz^2} = -\omega^2 LC\, I(z) \end{cases}$$

Si chiama $\beta \triangleq \omega\sqrt{LC}$ costante di propagazione per cui le equazioni precedenti diventano simili a quelle delle onde e ammettono quindi soluzioni

$$V(z) = V^+ e^{-j\beta z} + V^- e^{j\beta z} \qquad T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ periodo temporale}$$

$$I(z) = \underbrace{I^+ e^{-j\beta z}}_{\text{onda diretta}} + \underbrace{I^- e^{j\beta z}}_{\text{onda riflessa}} \qquad \lambda = \frac{2\pi}{\beta} \text{ periodo spaziale}$$

Si consideri l'onda progressiva
$V^+ e^{-j\beta z}$

posto $V^+ = |V^+|\, e^{j\alpha} \Rightarrow$ nel tempo $v^+(z,t) = |V^+| \cos(\omega t - \beta z + \alpha)$

Coefficiente di riflessione

$|\Gamma| \le 1$ $\xrightarrow{\text{gira}}$

$$\Gamma_V(z) \triangleq \frac{V^- e^{j\beta z}}{V^+ e^{-j\beta z}} = \frac{V^-}{V^+}\, e^{2j\beta z} \equiv \Gamma(0)\, e^{2j\beta z}$$

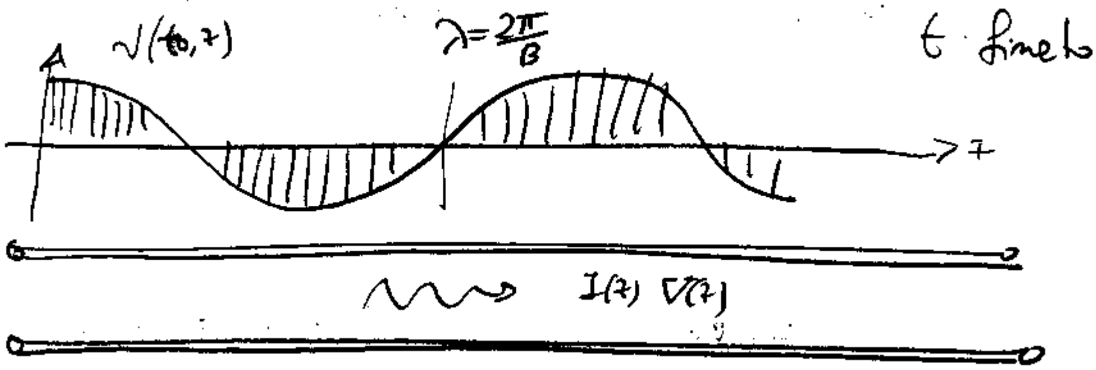
coef. riflessione posto in $z=0$

IMPEDENZA CARATTERISTICA DELLA LINEA

$$\Longrightarrow \frac{V^+ e^{-j\beta z}}{I^+ e^{-j\beta z}} = \frac{V^-}{I^-}\frac{e^{+j\beta z}}{e^{+j\beta z}}$$

$$= Z_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$$ impedenza caratteristica della linea

Reale (se linea senza perdite)



- costanti concentrate
- costanti distribuite

Il coefficiente di riflessione cambia quindi mentre ci si muove lungo la linea

si può scrivere $V^- e^{j\beta z} = V^-(z) = \Gamma(z)\, V^+(z)$

L'impedenza d'ingresso nel punto z è data da

$$Z_{in}(z) \triangleq \frac{V(z)}{I(z)} = \frac{V^+(z) + V^-(z)}{I^+(z) + I^-(z)}$$

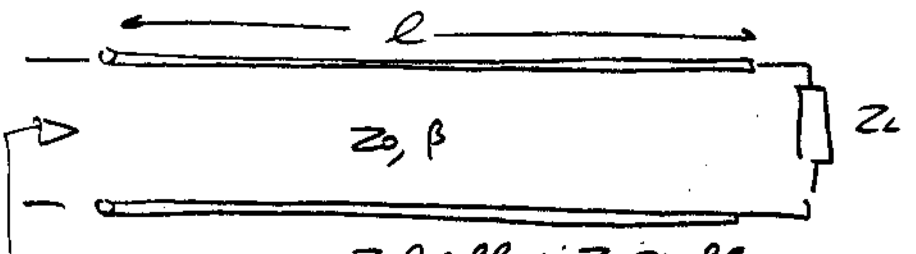
si può dimostrare che $I^-(z) = -\Gamma(z)\, I^+(z)$

$$\Rightarrow Z_{in} = \frac{V^+ [1 + \Gamma(z)]}{I^+ [1 - \Gamma(z)]} = Z_0 \frac{1 + \Gamma(z)}{1 - \Gamma(z)}$$

Invertendo si trova la relazione tra coefficiente di riflessione ed impedenza d'ingresso

$$\boxed{\Gamma(z) = \frac{Z_{in} - Z_0}{Z_{in} + Z_0}}$$

TRASPORTO DI IMPEDENZA



si dimostra che

$$Z_{in}(\ell) = Z_0 \frac{Z_L \cos\beta\ell + j Z_0 \sin\beta\ell}{Z_0 \cos\beta\ell + j Z_L \sin\beta\ell}$$

Un tratto di linea funziona quindi da trasformatore di impedenza.

CASI NOTEVOLI

1) Linea Infinitamente Lunga

non c'è l'onda riflessa $V^- = 0$ $I^- = 0$ $\Rightarrow \Gamma = 0$

$$\Rightarrow \boxed{Z_{in}(z) = Z_0}$$

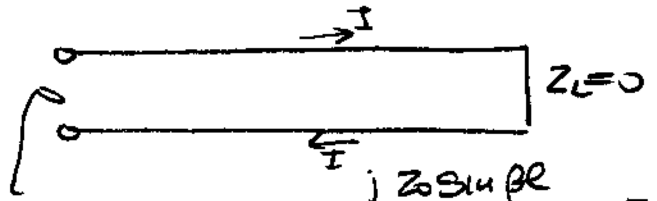
l'impedenza d'ingresso è quindi indipendente dalla frequenza

2) Linea chiusa su carico adattato $Z_L = Z_0$

$$Z_{in}(z) = Z_0 \frac{Z_0 \cos\beta l + j Z_0 \sin\beta l}{Z_0 \cos\beta l + j Z_0 \sin\beta l} = Z_0$$

il carico adattato simula quindi una linea infinitamente estesa

3) Linea chiusa in corto circuito $Z_L = 0$



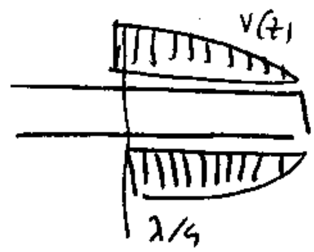
$$Z_{in} = Z_0 \frac{j Z_0 \sin\beta l}{Z_0 \cos\beta l} = j Z_0 \tan\beta l$$

$\boxed{\text{è immaginaria}}$

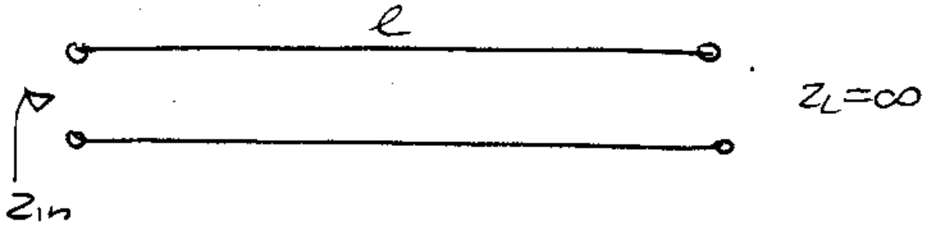
caso particolare $\left| \; l = \lambda/4 \Rightarrow \beta l = \frac{2\pi}{\lambda} \frac{\lambda}{4} = \frac{\pi}{2} \right.$

$$\Rightarrow \boxed{Z_{in} = \infty}$$

cioè un corto circuito viene trasformato in circuito aperto



4) Linea in circuito aperto

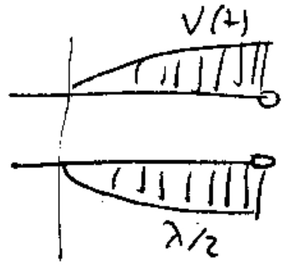


$$Z_{in}(\ell) = Z_0 \frac{\cos\beta\ell}{j\sin\beta(\ell)} = -j Z_0 \cot\beta\ell$$

è ancora un immaginario puro

caso particolare $\ell=\lambda/4 \Rightarrow \boxed{Z_{in}(\lambda/4)=0}$

cioè il circuito aperto è trasformato in un corto circuito



N.B. tratti di linea di trasmissione in corto-circuito e circuito-aperto vengono chiamati **STUB**.

5) Linea lunga $\ell=\lambda/2$ (e suoi multipli)

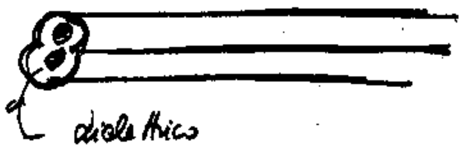
$$\beta\ell = \frac{2\pi}{\lambda}\frac{\lambda}{2} = \pi$$

$$\Rightarrow Z_{in}(\lambda/2) = Z_0 \frac{-Z_L}{-Z_0} = Z_L$$

trasformatore ideale : viene cioè vista esattamente l'impedenza di carico.

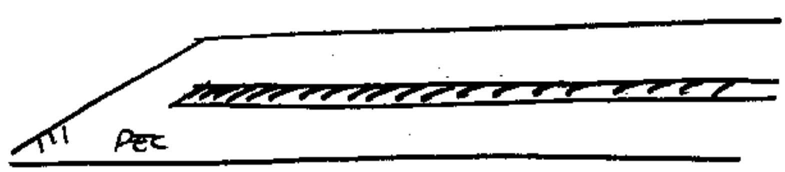
Esempi di linee di trasmissione a due conduttori

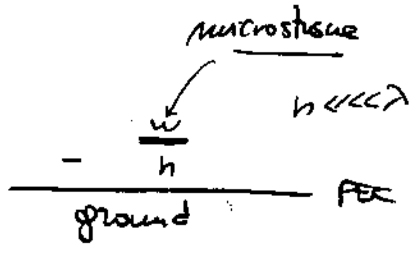
(A)



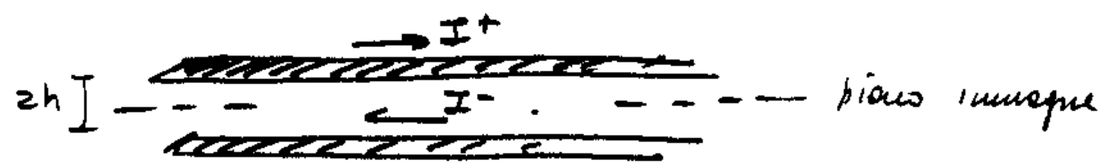
"piattina"

(B)

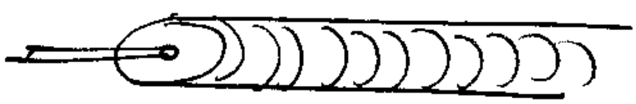




Il ground funge da piano immagine e quindi la struttura precedente è equivalente a due striscioline metalliche percorse da corrente opposte



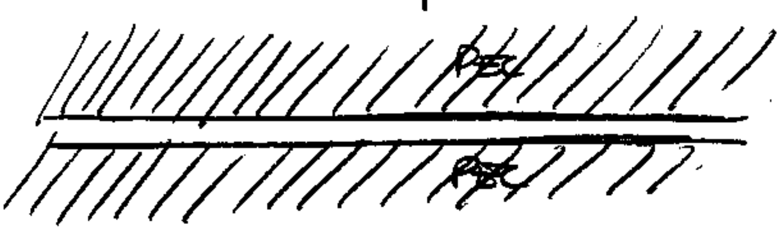
(C)



"Cavo coassiale"

E' una struttura asimmetrica in quanto i due conduttori non sono uguali.

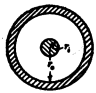
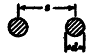
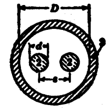
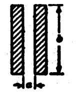
D



strip-line

Ogni struttura ha il β e Z_0 specifici

Table 5.11b
Formulas for Specific Transmission Line Configurations

			$p = \frac{s}{d}$ $q = \frac{s}{D}$ 	 Formulas for $a \ll b$
Capacitance C, farads/meter	$\dfrac{2\pi\epsilon}{\ln\left(\dfrac{r_0}{r_i}\right)}$	$\dfrac{\pi\epsilon}{\cosh^{-1}\left(\dfrac{s}{d}\right)}$	----	$\dfrac{\epsilon\, b}{a}$
External inductance L, henrys/meter	$\dfrac{\mu}{2\pi}\ln\left(\dfrac{r_0}{r_i}\right)$	$\dfrac{\mu}{\pi}\cosh^{-1}\left(\dfrac{s}{d}\right)$	----	$\mu\,\dfrac{a}{b}$
Conductance G, siemens/meter	$\dfrac{2\pi\sigma}{\ln\left(\dfrac{r_0}{r_i}\right)} = \dfrac{2\pi\omega\epsilon''}{\ln\left(\dfrac{r_0}{r_i}\right)}$	$\dfrac{\pi\sigma}{\cosh^{-1}\left(\dfrac{s}{d}\right)} = \dfrac{\pi\omega\epsilon''}{\cosh^{-1}\left(\dfrac{s}{d}\right)}$	----	$\dfrac{\sigma\, b}{a} = \dfrac{\omega\epsilon'' b}{a}$
Resistance R, ohms/meter	$\dfrac{R_s}{2\pi}\left(\dfrac{1}{r_0} + \dfrac{1}{r_i}\right)$	$\dfrac{2R_s}{\pi d}\left[\dfrac{s/d}{\sqrt{(s/d)^2 - 1}}\right]$	$\dfrac{2R_{s2}}{\pi d}\left[1 + \dfrac{1+2p^2}{4p^4}(1-4q^2)\right] + \dfrac{8R_{s3}}{\pi D}q^2\left[1 + q^2 - \dfrac{1+4p^2}{8p^4}\right]$	$\dfrac{2R_s}{b}$
Internal inductance L_i, henrys/meter (for high frequency)	$\longleftarrow \dfrac{R}{\omega} \longrightarrow$			
Characteristic impedance at high frequency Z_0, ohms	$\dfrac{\eta}{2\pi}\ln\left(\dfrac{r_0}{r_i}\right)$	$\dfrac{\eta}{\pi}\cosh^{-1}\left(\dfrac{s}{d}\right)$	$\dfrac{\eta}{\pi}\left\{\ln\left[2p\left(\dfrac{1-q^2}{1+q^2}\right)\right] - \dfrac{1+4p^2}{16p^4}(1-4q^2)\right\}$	$\eta\,\dfrac{a}{b}$
Z_0 for air dielectric	$60\ln\left(\dfrac{r_0}{r_i}\right)$	$120\cosh^{-1}\left(\dfrac{s}{d}\right) \cong 120\ln\left(\dfrac{2s}{d}\right)$ if $s/d \gg 1$	$120\left\{\ln\left[2p\dfrac{(1-q^2)}{(1+q^2)}\right] - \dfrac{1+4p^2}{16p^4}(1-4q^2)\right\}$	$120\pi\,\dfrac{a}{b}$
Attenuation due to conductor α_c	$\longleftarrow \dfrac{R}{2Z_0} \longrightarrow$			
Attenuation due to dielectric α_d	$\longleftarrow \dfrac{GZ_0}{2} = \dfrac{\sigma\eta}{2} = \dfrac{\pi}{\lambda}\left(\dfrac{\epsilon''}{\epsilon'}\right) \longrightarrow$			
Total attenuation dB/meter	$\longleftarrow 8.686(\alpha_c + \alpha_d) \longrightarrow$			
Phase constant for low-loss lines β	$\longleftarrow \omega\sqrt{\mu\epsilon'} = \dfrac{2\pi}{\lambda} \longrightarrow$			

All units above are mks.

$\epsilon = \epsilon' - j\epsilon''$ = permittivity, farads/meter
μ = permeability, henrys/meter } for the dielectric
$\eta = \sqrt{\mu/\epsilon}$ ohms

ϵ'' = loss factor of dielectric = σ/ω
R_s = skin effect surface resistivity of conductor, ohms
λ = wavelength in dielectric

Formulas for shielded pair obtained from Green, Leibe, and Curtis, *Bell System Tech. Journ.*, 15, pp. 248–284 (April 1936).