

# PROBLEMA DI SINTESI DI ARRAY

Scegliere i parametri geometrici ed elettrici di un array in modo che il pattern di radiazione soddisfi opportune specifiche dette del tipo di applicazione.

## Parametri geometrici

- numero radiatori
- tipo di allineamento (lineare, 2D, circolare, conforme)
- distanze tra i radiatori

## Parametri elettrici

- moduli e fasi di corrente alimentazioni

## Specifiche di Progetto

- BW, Direttività
- puntamento del fascio
- rapporto tra l'ampiezza del ML e quella del massimo SL

$$R = \frac{\text{ampl (ML)}}{\text{ampl [max(SL)]}}$$



(valori tipici 20 - 60 dB)

- geometria del fascio (è la specifica più generale)

# TIPOLOGIE DI ALIMENTAZIONE

## Arrey Broadside

si considerano Arrey broadside (alimentazione in parallelo)  
 $d \rightarrow \infty$

Vedremo 3 tipi di distribuzioni di corrente (alimentazioni)

- 1) uniforme (già vista)
  - 2) binomiale
  - 3) Dolph-Tschebyshev
- }  $I_m \neq I_o$   
 Alimentazione non Uniforme

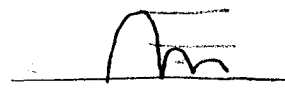
BW<sub>3</sub>  
 (aumenta) ↓

- uniforme
- Dolph-Tschebyshev
- binomiale

(è scelta a partire dalle specifiche sul BW e sul rapporto tra lobo principale e lobi secondari)

SL  
 (aumenta) ↓

- binomiale (nessuno per  $d < \lambda/2$ )
- Dolph-T
- uniforme



Direttività  
 (diminuisce) ↓

- uniforme

La tipologia delle correnti di alimentazione è scelta in base all'applicazione e alle specifiche di progetto.

Nei tre tipi di array considerati ci sono pochi gradi di libertà e si può intervenire solo su BW e sui SL.

→ // In queste alimentazioni, sebbene le impedenze possano essere differenti, non sono tuttavia indipendenti, sono cioè ottenute in modo globale.

# ALIMENTAZIONE NON UNIFORME

Si considerano  $N+1$  elementi con spetture uniforme disposti lungo l'asse  $\hat{z}$

$$F(\psi) = \sum_{m=0}^N C_m e^{j k_0 m d \cos \psi} \quad N+1 \text{ elementi}$$

si farà per ora riferimento a soli pattern broadside, pertanto  $\alpha_m = 0 \quad \forall m$

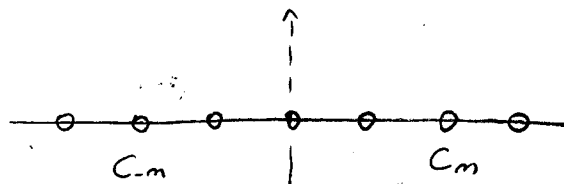
$$I_m = C_m \in \mathbb{R} \quad C_m \neq C_0$$

Le correnti di alimentazione possono essere in genere tutte differenti e anche negative (cambia il verso di scorrimento)

Come ulteriore ipotesi, si considerano solo

alimentazioni simmetriche

$$C_m = C_{-m} \quad m = -N \dots N$$



⊗ La simmetria si può anche esprimere come

$$C_m = C_{N-m} \quad \text{per } m = 0 \dots N$$

Nel caso di radiazioni discrete  $2N+1$ ,  
 il fattore di campo per l'energia risultò come

$$F(u) = \sum_{m=-N}^N C_m e^{jmu} \Rightarrow$$

$$F(u) = C_0 + 2 \sum_{m=1}^N C_m \cos mu$$

$$u = k_0 d \cos \psi$$

I gradi di libertà sono pertanto

$$N, \\ d \\ \{C_m\} \quad m=0..N$$

# ALIMENTAZIONE BINOMIALE (triangolare)

Si considere il seguente fattore di energia

$$F(u) = (1 + e^{ju})^N \Rightarrow \begin{array}{l} \text{si farà vedere che} \\ \text{corrisponde a} \\ M = N + 1 \text{ elementi} \end{array}$$

Al secondo membro compare la potenza  $N$ -ma di un binomio. Si utilizza pertanto l'espansione binomiale

$$(1 + e^{ju})^N = \sum_{m=0}^N 1^{N-m} e^{jmu} \binom{N}{m}$$

Si ricordi che

$$\binom{N}{m} = \frac{N!}{m! (N-m)!} \quad \begin{array}{l} \text{Coefficiente} \\ \text{Binomiale} \end{array}$$

Perché in generale il fattore di Array si scrive come

nel caso in  
esempio  $\Rightarrow$

$$F(u) = \sum_{n=0}^N C_n e^{jnu}$$

$$F(u)_{bin} = \sum_{n=0}^N \binom{N}{n} e^{jnu}$$

i coefficienti di alimentazione  $C_n$  sono pertanto pari a

$$C_m = \binom{N}{m} \quad m: 0 \dots N$$

• Si ottiene un'alimentazione simmetrica, i cui termini sono calcolabili con il Triangolo di Tartaglia

TRIANGOLO DI TARTAGLIA

			1							$\rightarrow N=0$	$\Rightarrow M=1$ elemento
			1	1						$\rightarrow N=1$	$\Rightarrow M=2$ elementi
			1	2	1					$\rightarrow N=2$	
			1	3	3	1				$\rightarrow N=3$	
			1	4	6	4	1			$\rightarrow N=4$	
			1	5	10	10	5	1		$\rightarrow N=5$	$\leftarrow M=5$ elementi
			1	6	15	20	15	6	1	$\rightarrow N=6$	

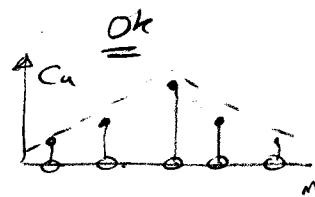
Alim. Simmetrica  $\leftarrow$   $C_m = C_{N-m}$

ex  $N=4 \Rightarrow M=5$  elementi

- $C_0 = 1$
- $C_1 = 4$
- $C_2 = 6$
- $C_3 = 4$
- $C_4 = 1$

(anotigipete)

$\rightarrow$  Alimentazione tapered (max al centro min e i bordi)



• DIAGRAMMA di RADIAZIONE

Riscriviamo

$$F(u) = (1 + e^{ju})^N = e^{j\frac{uN}{2}} \left( \frac{e^{-j\frac{u}{2}} + e^{j\frac{u}{2}}}{2} \right)^N 2^N$$

$$F(u) = e^{j\frac{N}{2}u} \left[ \cos \frac{u}{2} \right]^N 2^N$$

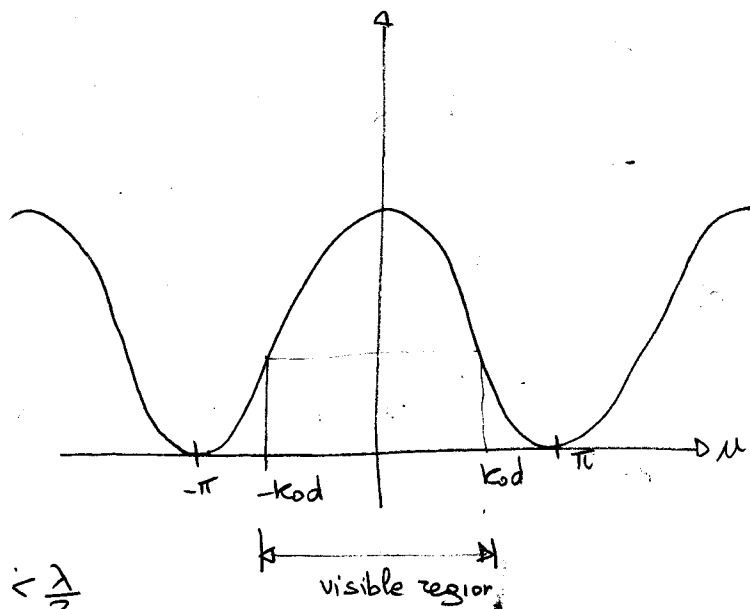
in modulo

$$|F| = z^N \left| \cos^N \frac{u}{2} \right|$$

si annulla per  $u = m\pi$

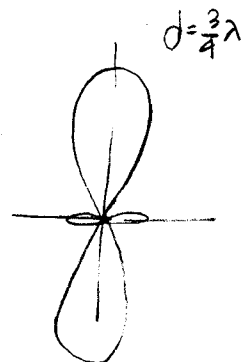
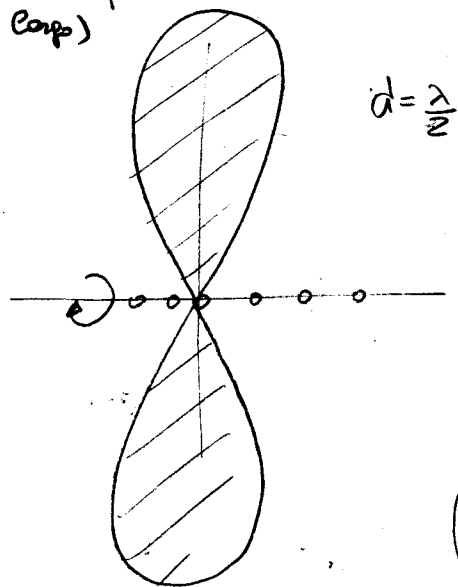
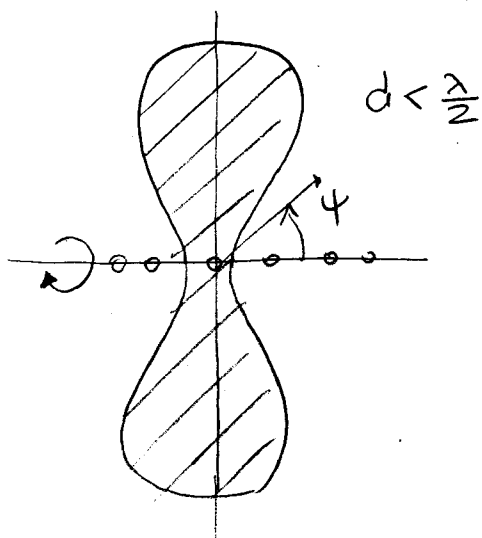
se si fa in modo che le finestre di visibilità sia più piccole di  $2\pi$

$$k_0 d < \pi \Rightarrow d < \frac{\lambda}{2}$$



⇒ solo un lobo in zone di visibilità

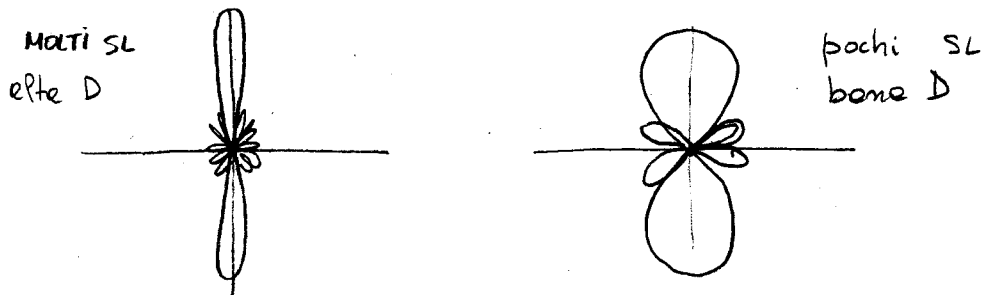
Non vi sono lobi secondari e quindi tutta la potenza di radiazione è concentrata nel M.L. (che è comunque molto largo)



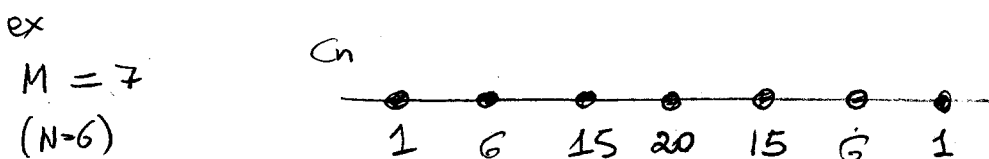
■ se  $d > \frac{\lambda}{2}$  compaiono i S.L.

L'elementazione binomiale presenta comunque alcune criticità:

1 L'entità di SL dipende dal numero BW del ML e quindi una bassa direttività. Ciò vale in generale: tanti meno lobi in zone di visibilità, quanto più è esteso il ML



2 Eccessive differenze tra le ampiezze di alimentazione per cui al centro dell'array sono necessari dei valori molto più alti che ai bordi:



Per avere una buona alimentazione, stabile e affidabile, le ampiezze devono essere tutte molto simili (per lo meno dello stesso ordine di grandezza). Per esempio si può valutare il fattore

$$\bullet \frac{C_{max}}{C_{min}} \quad (= 20 \text{ in questo caso})$$

Perché le alimentazioni risultano molto differenti, l'array è portato a funzionare in condizioni critiche: nel senso che, se qualche alimentazione è instabile o va fuori uso, il diagramma di radiazione subisce una brusca variazione

correnti molto differenti  $\Rightarrow$  |F| fortemente sensibile alle variazioni dei  $C_n$   
 (la rete di alimentazione è più complessa)

correnti abbastanza vicine  $\Rightarrow$  |F| stabile per piccole variazioni dei  $C_n$



cont. → Gli elementi vicini ai bordi dell'array sono molto poco eccitati rispetto ad i radiatori in posizione centrale, e quindi contribuiranno solo in minima parte alle radiazioni complessive. Di conseguenza tali antenne sono utilizzate in maniera non efficiente ed è come se la lunghezza fisica dell'array (N·d) fosse ridotta, con conseguente diminuzione di direttività. Questa configurazione vale per qualunque tipo di alimentazione tapered

### Dimensionamento dell'alimentazione Binomiale

Nel caso particolare di spettrale  $d = \lambda/2$  valgono le seguenti relazioni tra BW, direttività minima e numero di antenne

$$BW_{-3} \approx \frac{0.75}{\sqrt{L/\lambda}} \approx \frac{1.06}{\sqrt{N-1}}$$

$$D_0 \approx 1.77 \sqrt{1 + 2L/\lambda} \approx 1.72 \sqrt{N}$$

(direttività dal solo fattore d'array, applicabile quindi con senso fisico solo in caso di radiazioni isotropi)

### Esempio

Calcolare le perdite di guadagno per un'illuminazione binomiale rispetto a quelle uniformi, e parte di spettrale e numero di elementi

$$G_A = G_0 \frac{\sum |I_n|^2}{\sum I_n^2}$$

Ex M=5 elementi → N=4

Coefficient  $C_u = \{1, 4, 5, 4, 1\}$

$$G_T = G_0 \frac{\sum |I_u|^2}{\sum |I_u|^2}$$

Area uniforme

$$G_{T|unif} = N \cdot G_0 = 5 \cdot G_0$$

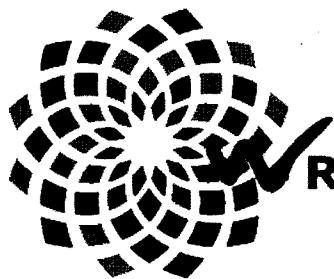
Area binomiale

$$G_{T|bin} = \frac{|1+4+5+4+1|^2}{1+16+36+16+1} G_0 = \frac{256}{73} G_0 = \underline{\underline{3,55 G_0}}$$

$$\frac{G_{T|bin}}{G_{T|unif}} = 0,73$$

P.S. Utilizzando le formule della direttività si sarebbe ottenuto

$$D \approx 1,2 \sqrt{N} = 1,2 \sqrt{5} = \underline{\underline{3,89}}$$



Esempio = dimensionare un array binomiale orientato  
Spostatura  $d = \lambda/2$  e  $BW_{-3} = 5^\circ$

$$BW_{-3} = \frac{1.06}{\sqrt{N-1}} = 5^\circ = 8.7 \cdot 10^{-2} \text{ rad}$$

$$N = \left( \frac{1.06}{8.7 \cdot 10^{-2}} \right)^2 + 1 = 149.5 \approx \boxed{150} \text{ elementi}$$

La massima direttività corrispondente è

$$D_0 = 1.72 \sqrt{N} = 1.72 \sqrt{150} = 21 = \underline{13.2 \text{ dB}}$$

Si confrontano le prestazioni con quelle di un array uniforme orientato  
con lo stesso numero di elementi

$$N+1 = 150$$

$$D_0 = 2.37 (N+1) \frac{d}{\lambda} = \frac{2.37 \cdot 150}{2} = 177.7 = \underline{\underline{22.5 \text{ dB}}}$$

$$\rightarrow BW_{-3} = \frac{2.65 \lambda_0}{(N+1) \pi d} = \frac{2.65 \cdot \lambda_0}{150 \cdot \pi \cdot \lambda_0 / 2} = 1.12 \cdot 10^{-2} \text{ rad} = \underline{\underline{0.6^\circ}}$$

L'array binomiale ha quindi un guadagno di circa 100 volte  
più basso di un array binomiale perché deve molto molti più  
elementi ai bordi.

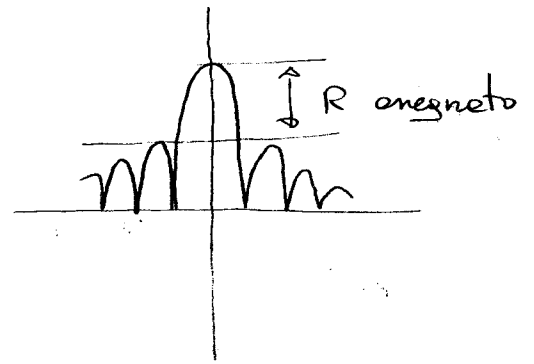
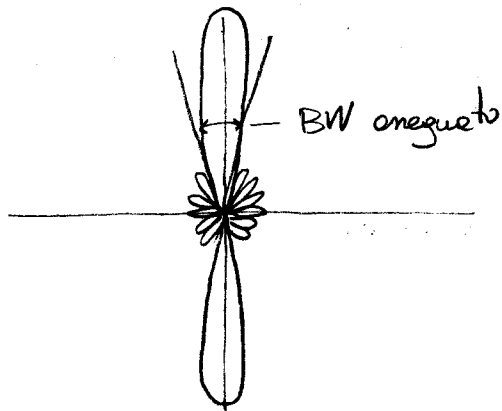
Rispetto alle direttività si comporta come un array uniforme orientato  
in numero di antenne inferiori.

$$(N+1) = \frac{D_0}{2.37} \frac{\lambda}{d} = \frac{22.2}{2.37} = 17.7 \approx \underline{18 \text{ elementi}}$$

Cioè l'array binomiale progettato ha la stessa direttività di un  
array uniforme orientato 18 elementi.

# SINTESI DI TSCHEBYSHEV

Questo metodo permette di operare sintesi rispetto e specifiche sul BW e sul rapporto R tra ML e massimo side lobe.



Vengono utilizzati i polinomi di Tschebishev i quali sono definiti in maniera ricorsiva

$$\begin{cases} T_0(x) = 1 \\ T_1(x) = x \\ T_m(x) = 2x \cdot T_{m-1}(x) - T_{m-2}(x) \end{cases}$$

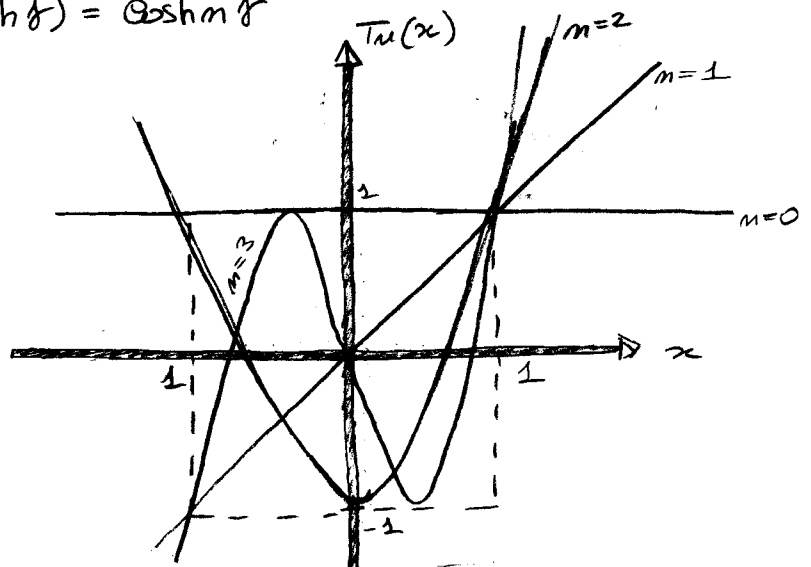
## PROPRIETA'

Vole inoltre l'importante proprietà

- $T_m(\cos \theta) = \cos m \theta$
- $T_m(\cosh \theta) = \cosh m \theta$

con  $\theta \in \mathbb{C}$

Graficamente:



### Caratteristiche dei polinomi $T_m(x)$ :

- ☐ fuori del quadrato unitario tutti i polinomi sono monotoni (crescenti e destra e, in virtù del grado, crescenti o decrescenti e sinistra)
- ☐ tutti gli zeri si trovano nell'intervallo  $x \in [-1, 1]$
- ☐ le oscillazioni tra gli zeri sono ancora limitate entro  $[-1, 1]$

Idea: si farà in modo che il fattore d'Anney sia un polinomio di Chebishev, che il ML corrisponde al tratto di monotonia, il SL all'intervallo  $(-1, 1)$  ove è presente l'oscillazione ma di ampiezza controllabile.

- ML  $\Leftrightarrow$  tratto di monotonia
- SL's  $\Leftrightarrow$  intervallo di oscillazione (ampiezza limitata)

Con riferimento ad un eney simmetrico di  $2N+1$  elementi, scegliamo il fattore d'Anney come:

$$F(u) = T_N(x) \Leftrightarrow 2N+1 \text{ elementi}$$

con  $\begin{cases} x = a + b \cos u \\ a, b \text{ da determinare (?)} \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} \# \text{ antenne + altri} \\ 2 \text{ gradi di libert\`a} \\ + \\ d \end{matrix}$

coefficienti di alimentazione avremo poi calcolati riconducendoci alle forme

$$F(u) = C_0 + 2 \sum_{n=1}^N C_n \cos n u$$

Forma di un fattore d'eney simmetrico

Come primo passo si fa vedere che  $T_N(x)$  deriva effettivamente un fattore d'Arrey simmetrico:

Perché  $T_N(x)$  è un polinomio, lo posso scrivere come:

$$T_N(x) = \sum_{m=0}^N A_m x^m = \sum_{m=0}^N (a + b \cos u)^m \cdot A_m$$

si espande la potenza del binomio

$$(a + b \cos u)^m = \sum_{k=0}^m \binom{m}{k} a^{m-k} b^k \cos^k u$$

$$\Rightarrow T_N(x) = \sum_{m=0}^N \sum_{k=0}^m A_m a^{m-k} b^k \binom{m}{k} \cos^k u$$

si tratta di una combinazione lineare di termini in  $\cos^k u$ , e cioè di coseni di diverso periodo

ex

$$\begin{aligned} \cos^2 u &= \frac{1 + \cos 2u}{2} \\ \vdots \\ \cos^3 u &= \frac{3 \cos u + \cos 3u}{4 = 2^{3-1}} \\ \vdots \\ \Rightarrow \cos^k u &= \sum_{e=0}^k B_e \cdot \cos e u \end{aligned}$$

formule di trasformazione  
di potenze di coseni.

$$\Rightarrow T_N(x) = \sum_{m=0}^N \sum_{k=0}^m \sum_{e=0}^k A_m a^{m-k} b^k \binom{m}{k} B_e \cos e u$$

in forma più compatta, riordinando i termini in coseno:

$$T_N(x) = U_0 + 2 \sum_{m=1}^N \frac{U_m}{2} \cos m u$$

$\left\{ U_0, \dots, \frac{U_m}{2} \right\}$  termini di alimentazione  
 $m=1 \dots N$   
 $\uparrow$   
 NB

$$T_2(a+b \cos u) = (2a^2 + b^2 - 1) + 4ab \cos u + b^2 \cos 2u$$

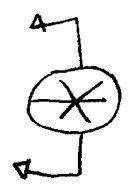
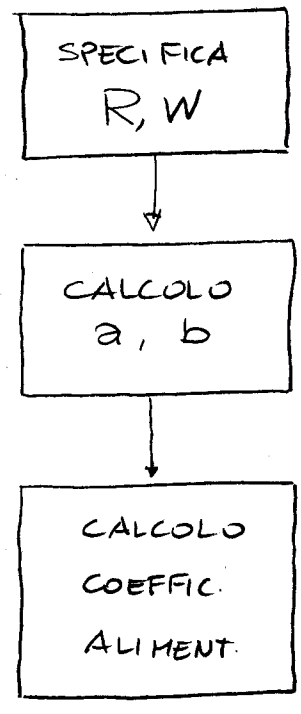
$$T_3(a+b \cos u) = (4a^3 + 6ab^2 - 3a) + (12a^2b + 3b^3 - 3b) \cos u + 6ab^2 \cos 2u + b^3 \cos 3u$$

NOTA : esistono degli algoritmi ricorsivi per calcolare velocemente i coefficienti

### Determinazione dei coefficienti a e b

Ricordiamo che avevamo posto  $F(u) = T_N(x)$  con  $x = a + b \cos u$

Il problema della sintesi di Chebyshev si risolve nel determinare a e b relativamente alle particolari specifiche di progetto.



ci occuperemo di questa parte

Algoritmi veloci

## 1. Specifica di Ampiezza

Si richiede che il rapporto tra l'ampiezza del ML e quella del massimo SL sia assegnata e sia pari ad R

$$\frac{|F(ML)|}{|F(SL_{max})|} = R \quad \frac{Amp[ML]}{Amp[max(SL)]} = R$$

$$R_{dB} = Amp[ML]_{dB} - Amp[max(SL)]_{dB}$$

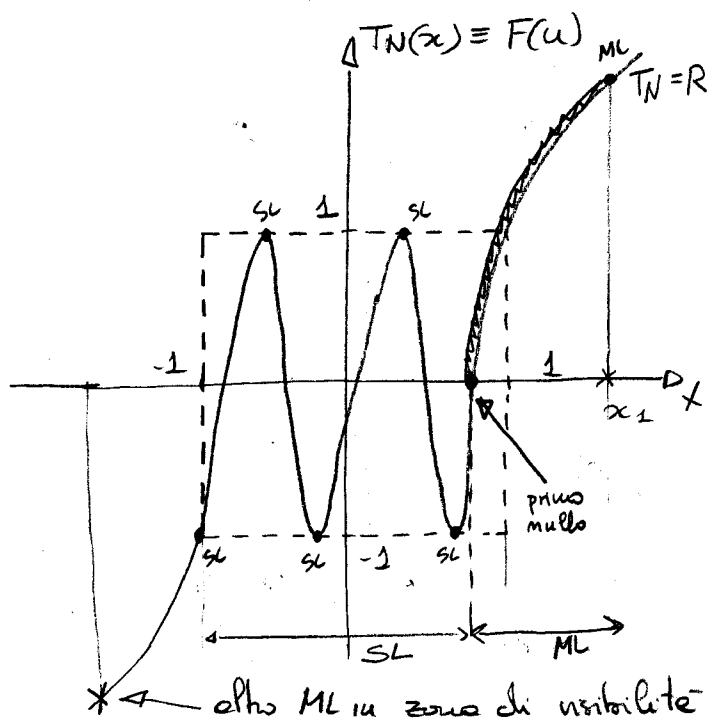
idea:

si sceglie il ML  
corrispondente al punto  
 $x_1$ , appartenente alla  
regione di monotonia  
di TN per cui

$$TN(x_1) = R$$

SL corrispondono  
alle zone

$$-1 < x < 1$$



intervallo in cui l'ampiezza è limitata. Di conseguenza  
risulta immediatamente imposto: lo specifica nel rapporto R.

Problema:

$a, b = ?$  tali che

$$\left\{ \begin{array}{l} -1 \leq x_1 < x_2 \quad \text{in zona di visibilità} \\ TN(x_1) = R \\ SL \text{ entro } [-1, 1] \end{array} \right.$$

se  $x_1 < -1$  nasce  
un altro ML in  
zona di visibilità

Si presentano due casi in base alle scelte delle spazietture  
dei raddiatori e quindi dell'ampiezza dell'intervallo di visibilità

a)  $d < \frac{\lambda}{2}$

b)  $\frac{\lambda}{2} < d < \lambda$  (in questo caso è possibile ottenere)  
(in BW più stretto)

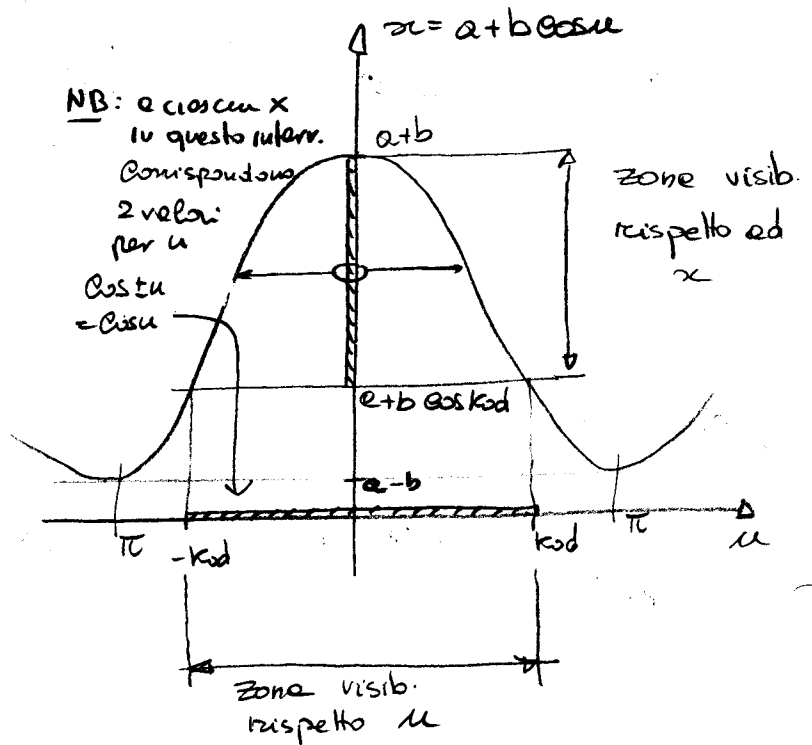


a)  $d \ll \frac{\lambda}{2}$

intervallo di visibilità  
 $|u| \ll kd$

per  $d \ll \frac{\lambda}{2}$

$\Rightarrow kd \ll \frac{2\pi}{\lambda} \cdot \frac{\lambda}{2} = \pi$   
 $kd \ll \pi$



se  $-kd \ll u \ll kd$



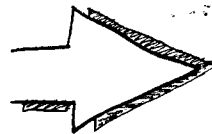
$a + b \cos kd \ll x \ll a + b$  zone di visibilità rispetto ad  $x$

Le specifiche su  $R$  impone che

1.  $-1 < x_1 < 1$  - zona di visibilità (SL e ML)
2.  $T_N(x_1) = R$  - specifiche sul rapporto

La prima condizione comporta che:

ML  $\rightarrow$  
$$\begin{cases} a + b \cos kd = -1 \\ a + b = x_1 \end{cases}$$



calcolo  $a, b$  una volta noto  $x_1$

Risolvendo il sistema  $2 \times 2$  in  $a$  e  $b$ :

$$\begin{cases} a = \frac{1 + x_1 \cos kd}{\cos kd - 1} \\ b = -\frac{1 + x_1}{\cos kd - 1} \end{cases}$$

NB

Perché  $kd \ll \pi$   
 il denominatore non sarà mai nullo

- Determino  $x_1$  :  $T_N(x_1) = R$  \_\_\_\_\_

L'equazione  $T_N(x_1) = R$  è algebrica di grado elevato, per risolverla introduco una v. ausiliaria  $x_1 = \cosh \theta_1$  \*

L'equazione da risolvere diventa pertanto:

$$T_N(\cosh \theta_1) = R$$

Si ricorda una proprietà dei polinomi di Chebyshev per cui

$$T_N(\cosh \theta) = \cosh(\theta \cdot N)$$

$$\cosh(N\theta_1) = R$$

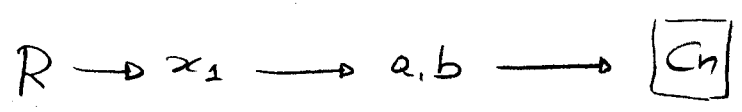
$$\Rightarrow \theta_1 = \frac{1}{N} \operatorname{arccosh}(R)$$

\*

Si usa  $x_1 = \cosh \theta_1$  e non  $x_1 = \cos \theta_1$  perché nel secondo caso dovrebbe necessariamente essere  $|x_1| < 1$

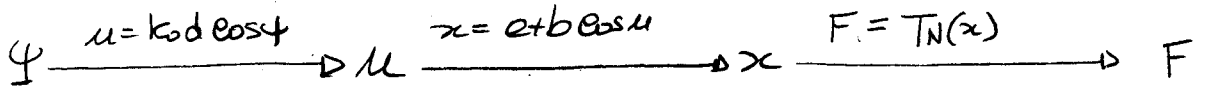
quindi  $x_1 = \cosh \theta_1$

$$x_1 = \cosh\left[\frac{1}{N} \operatorname{arccosh} R\right]$$



MP diagramma di radiazione (eventualmente in forma polare)  
 $(\psi, |F(\psi)|)$

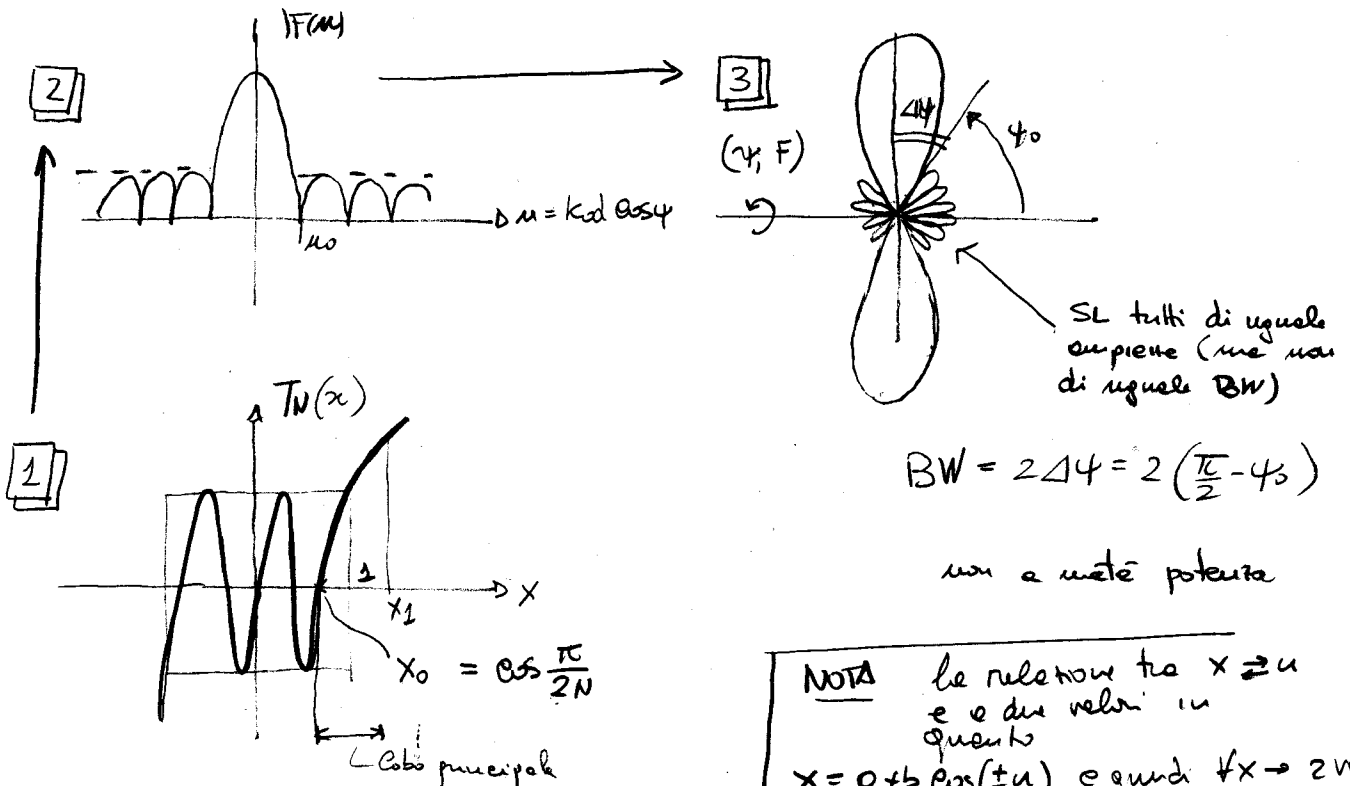
può essere ottenuto secondo le trasformazioni:



## Calcolo del Beam Width

Basta determinare la posizione del primo zero di  $T_N(x)$

$$x_0 \rightarrow u_0 \rightarrow \psi_0$$



Il problema è quello di calcolare  $\varphi_0$

$\varphi_0$  è tale che

$$u_0 = k_0 d \cos \varphi_0 \quad \text{e} \quad |F(u_0)| = 0 \quad \text{primo zero}$$

vale la relazione

$$x = a + b \cos u \quad \xrightarrow{u=u_0} \quad x_0 = a + b \cos u_0$$

Calcoliamo  $x_0$ , poi a ritroso si risale al BW  
noti  $a$  e  $b$

$$x_0 \rightarrow u_0 = \arccos \left[ \frac{x_0 - a}{b} \right] \rightarrow \varphi_0 = \arccos \left[ \frac{u_0}{k_0 d} \right] \rightarrow \text{BW}$$

$\rightarrow x_0$  è lo zero del  $N$ -mo polinomio di Chebyshev più vicino ad 1

Gli zeri di  $T_N(x)$  si calcolano facilmente ponendo  
 $x = \cos \theta$  (in tal caso infatti è  $|x| < 1$ )

$$\Rightarrow T_N(x) = \cos N\theta = 0$$

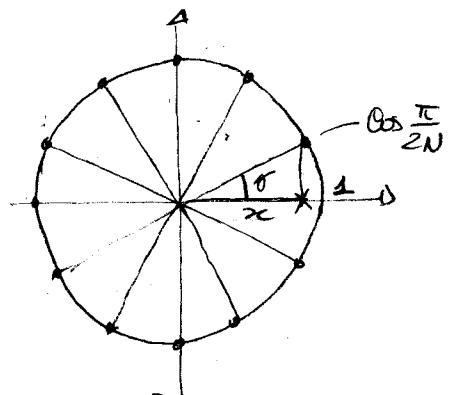
$$T_N(x) = 0 \Rightarrow \cos N\theta = 0$$

$$\theta = \frac{2l-1}{N} \frac{\pi}{2}$$

$$l = 1, 2, \dots, N$$

questi angoli dividono in maniera uniforme  $2\pi$

zeri  $T_N(x)$  :  $x_l = \cos \left[ \frac{2l-1}{N} \frac{\pi}{2} \right]$



Lo zero più vicino ad 1

risulta pertanto  $x_0 = \cos \frac{\pi}{2N}$

$$\Rightarrow \text{BW} = 2 \left\{ \frac{\pi}{2} - \arccos \left[ \frac{a \cos \frac{\cos \frac{\pi}{2N} - a}{b}}{k_0 d} \right] \right\}$$

— Sintesi su R : ottimizzazione —

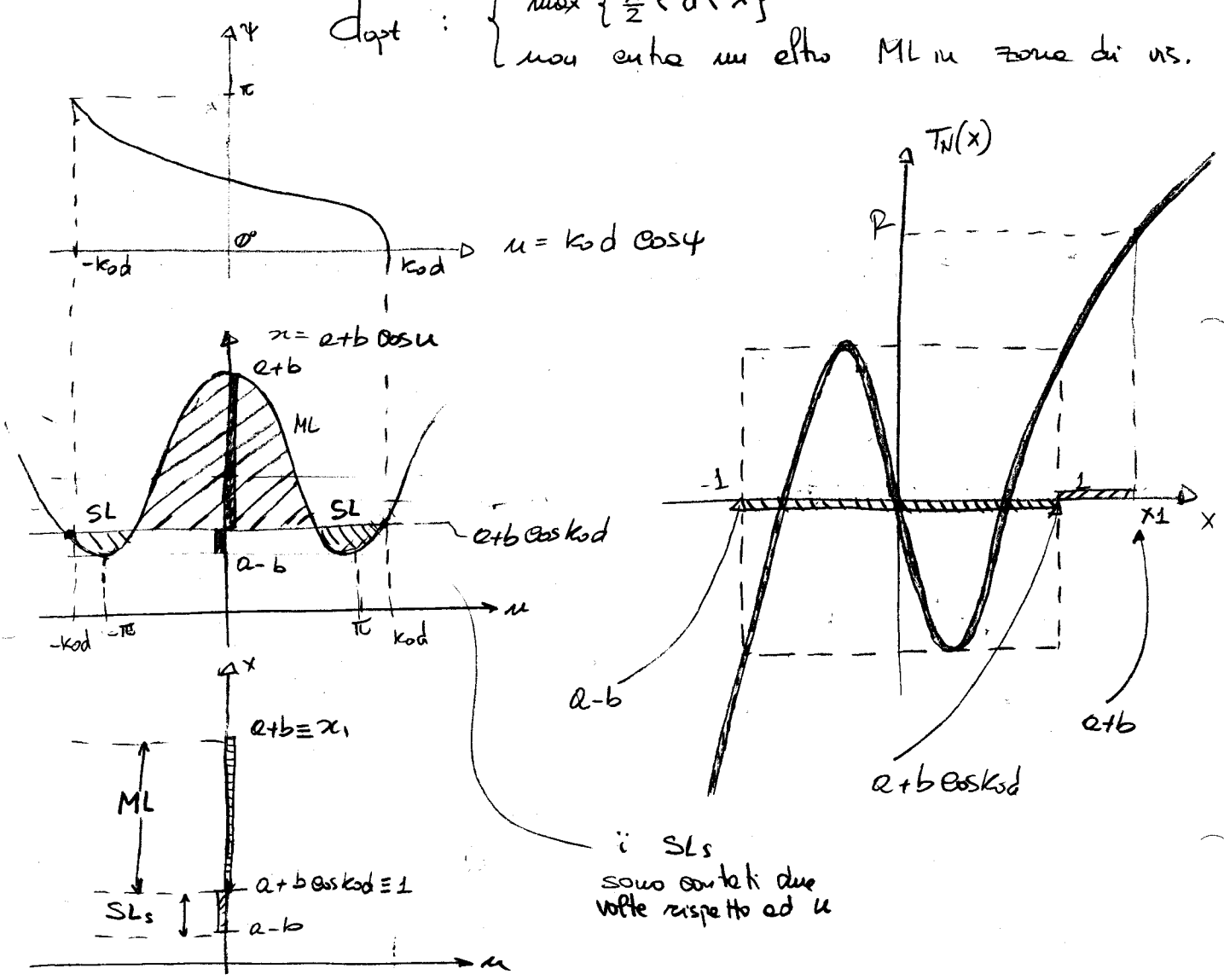
Per un assegnato livello R di Cobi secondari, si può ottenere un ML più stretto, e quindi un eney più direttivo (più basso BW), facendo entrare il maggior numero possibile di SL nelle zone di visibilità di u. Si può agire su tale configurazione portando la spaziatore d ad un valore più grande di  $\lambda/2$

$$\frac{\lambda}{2} < d < \lambda \implies \text{ottimizzazione}$$

$$k_0 d > \pi$$

Il valore ottimale di d è il massimo reale  $< \lambda$  per cui non entra un altro ML in zona di visibilità

$$d_{opt} : \begin{cases} \max \{ \frac{\lambda}{2} < d < \lambda \} \\ \text{non entra un altro ML in zona di vis.} \end{cases}$$



il parametri  $a$  e  $b$  vanno allora calcolati imponendo le condizioni

$$\begin{array}{l} a+b=x_1 \\ a+b \cos kd = 1 \\ a-b = -1 \\ T(x_1) = R \end{array} \Rightarrow a, b, d \rightarrow \text{ottimo}$$

$$\Rightarrow x_1$$

NOTA: dato che le zone di visibilità  $x(u)$  oscilla per più di un periodo pertanto la funzione inversa  $u(x)$  ha più valori corrispondenti ad uno stesso punto. Ciò significa che i lobi secondari vengono contati più volte (uno stesso lobo entra più volte in zone di visibilità).

Le specifiche di livello dei SL impone:

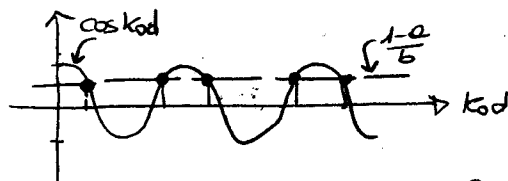
$$T_N(x_2) = R \Rightarrow x_2$$

utilizzando le condizioni

$$\begin{cases} a+b = x_1 \\ a-b = -1 \end{cases} \Rightarrow \begin{aligned} a &= \frac{x_1 - 1}{2} \\ b &= \frac{x_1 + 1}{2} \end{aligned}$$

della condizione:  $a+b \cos kd = 1$

$$\Rightarrow \cos kd = \frac{1-a}{b}$$



tra le infinite soluzioni di questa equazione si sceglie il numero  $d$  tale da soddisfare la limitazione

$$\frac{\lambda}{2} < d < \lambda \Rightarrow \text{ottimizzazione}$$

Se ora si va a calcolare il nuovo BW si può notare che risulta sicuramente diminuito rispetto all'anelogo caso senza ottimizzazione.

# Specifiche sul BW

$\cos \alpha < \frac{\lambda}{2}$

$BW = 2 \left( \frac{\pi}{2} - \psi_0 \right) = \pi - 2\psi_0$

$\psi_0 \rightarrow u_z \rightarrow x_z$

$x_z = \cos \frac{\pi}{2N}$

Zero più vicino a  $x = 1$

vincoli

$$\begin{cases} x_z = a + b \cos u_z & \leftarrow \text{posizione del primo zero a partire dal BW.} \\ a + b \cos k_0 d = -1 & \leftarrow \text{estremo inferiore F.V. (in } x) \end{cases} \Rightarrow a, b$$

$$a = - \frac{\cos u_z + x_z \cos k_0 d}{\cos u_z - \cos k_0 d}$$

$$b = \frac{1 + x_z}{\cos u_z - \cos k_0 d}$$

A questo punto resta individuato

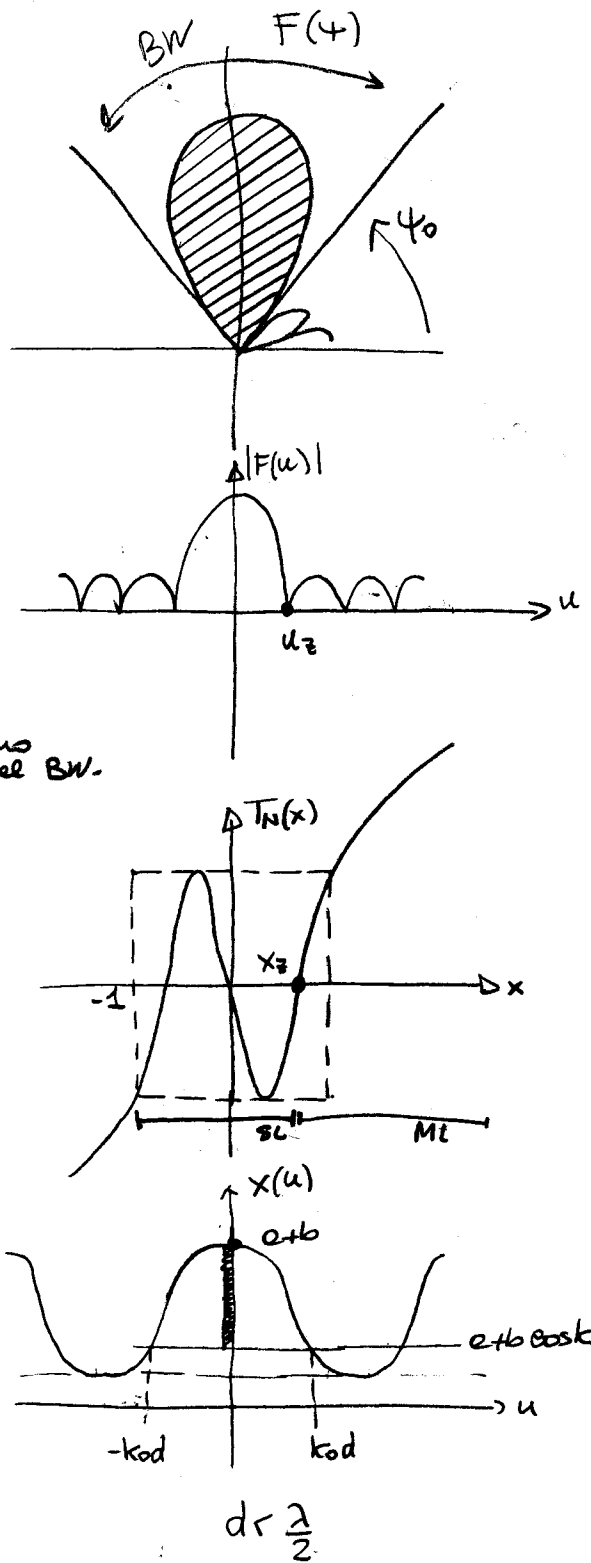
$x_1 = a + b$



$R = T_N(x_1)$

Non si può agire sul rapporto che resta quindi imposto.

$\Rightarrow$  elemento di  $R$  per  $\frac{\lambda}{2} < d < \lambda$  (a parte di BW)



## SAGOMATURA DEL FASCIO

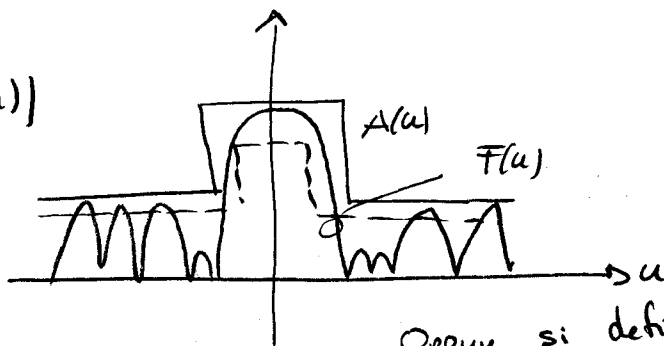
Sagomare il pattern d'ony significa determinare i coefficienti di alimentazione in modo che

$$\|F(u) - A(u)\| \text{ minimo}$$

ovv  $A(u)$  è il fascio teoricamente desiderato.

In altri casi si può pure imporre che il pattern d'ony resti confinato entro una certa maschera

$$|F(u)| < |A(u)|$$



Oppure si definisce una maschera superiore e una inferiore  
 $M_{\text{max}} \leq |F(u)| \leq M_{\text{up}}$

### Sintesi di Fourier

Consideriamo fasci simmetrici e quindi un fattore d'ony desiderato  $A(u)$  pari.

Si vogliono determinare le alimentazioni di un ony (simmetrico) di  $2N+1$  elementi

$$F(u) = c_0 + 2 \sum_{n=1}^N c_n \cos nu$$



È un problema di approssimazione funzionale ottimale  
con  $(N+1)$  gradi di libertà.

- Si dimostra che i  $\{C_n\}$  sono coincidenti con i primi  $N+1$  coefficienti della serie di Fourier di  $A(u)$  sulle basi  $\{\cos nu\}$

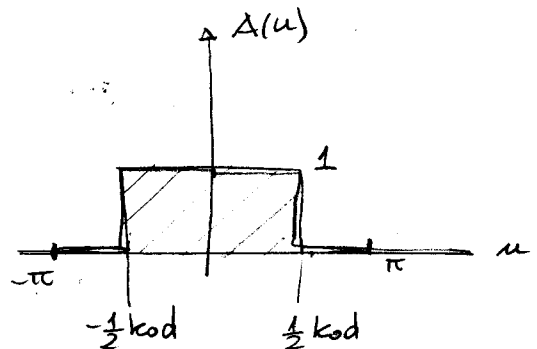
$$A(u) = A_0 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos nu \quad \text{dove } A(u) \text{ è una funzione pari}$$

dove

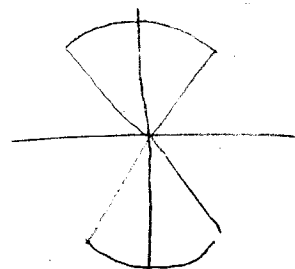
$$C_n = A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} A(u) \cos nu \, du$$

Esempio: Avendo a disposizione 7 radiatori  
spaziali  $d = \frac{\lambda}{2}$ , segnare il pattern  
d'array e la funzione pari  $A(u)$  data  
da

$$A(u) = \text{rect}\left(u, \frac{k_0 d}{2}\right)$$



$$A_n = \frac{1}{2\pi} \int_{-\frac{k_0 d}{2}}^{\frac{k_0 d}{2}} \cos nu \, du = \frac{\sin(n k_0 d / 2)}{n\pi}$$



$$C_m = \frac{\sin \frac{k_0 d}{2} m}{m\pi} \quad m \neq 0$$

$$C_0 = \frac{\sin \frac{k_0 d}{2} m}{\frac{k_0 d}{2} m} \Big|_{m=0} \frac{1}{\pi} \cdot \frac{k_0 d}{2} = \frac{k_0 d}{2\pi}$$

$$\Rightarrow F(u) = \frac{k_0 d}{2\pi} + 2 \sum_{m=1}^N \frac{1}{m\pi} \sin\left(\frac{k_0 d}{2} m\right) \cdot \cos m u$$

se  $d = \frac{\lambda}{2} \Rightarrow k_0 d = \pi$

i coefficienti risultano

$$C_0 = \frac{1}{2}$$

$$C_1 = \frac{1}{\pi}$$

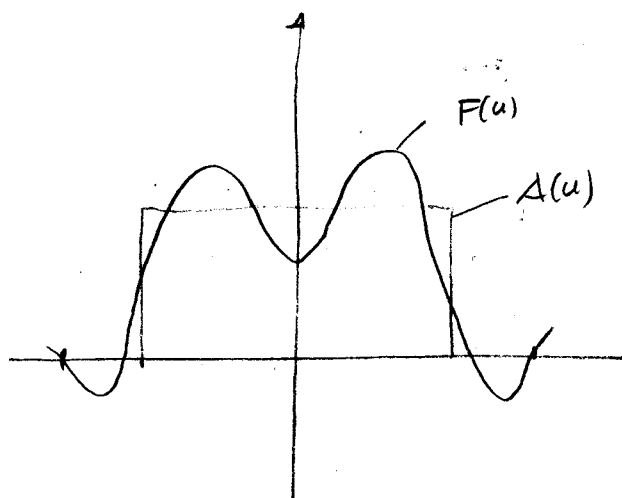
$$C_2 = 0$$

$$C_3 = -\frac{1}{3\pi}$$

$$C_{2n} = 0$$

(come il che circola  
in verso opposto)

• per  $N=3$  ( $2N+1 = 7$  zodiatori) il risultato è il seguente

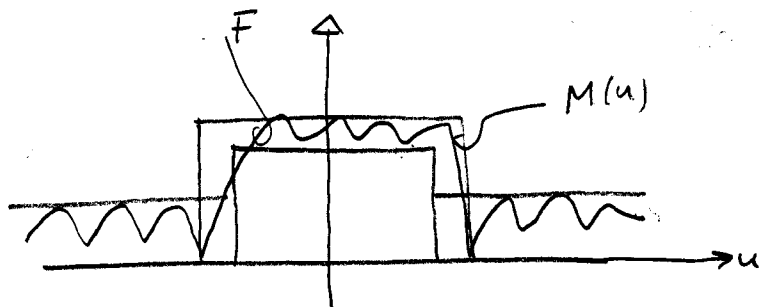


# SINTESI DI FOURIER ITERATIVA

## METODO DELLE PROIEZIONI

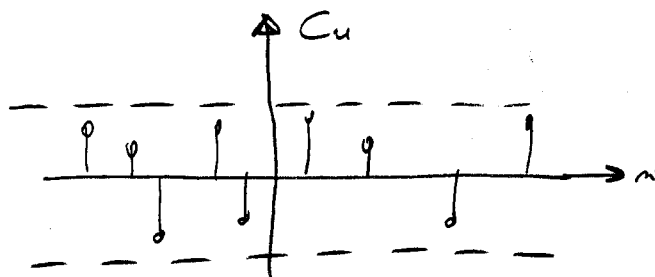
Si richiede che il fattore di ondeggiamento sia contenuto entro una maschera  $M(u)$

$$M_D(u) \leq F(u) \leq M_U(u)$$



Si richiede inoltre che i coefficienti abbiano una dinamica limitata

$$I_D \leq C_n \leq I_U$$



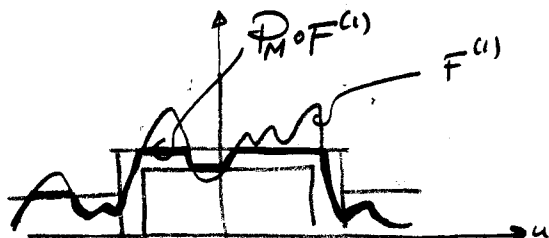
Si costruiscono procedure iterative

0 :  $C_n^{(0)} = 1 \quad \forall n$  stima iniziale

1 :  $F^{(1)}(u) = F[C_n] = \sum_n C_n e^{j k_0 n u}$

2 : proiezione sulle maschere:  
si setta  $F^{(1)}$  alle maschere

$$\tilde{F}^{(1)} = \mathcal{P}_M \circ F^{(1)}$$



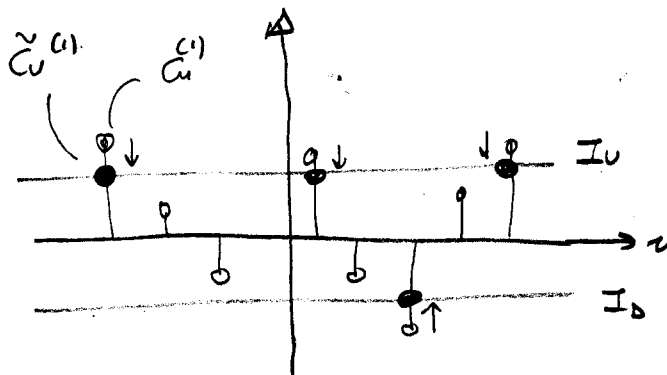
3 : si applica la sintesi di Fourier a  $\tilde{F}^{(1)}$

$$\{C_n^{(1)}\} = \mathcal{F}^{-1}[\tilde{F}^{(1)}(u)]$$

$$C_n^{(1)} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \tilde{F}^{(1)}(u) \cos n u \, du$$

4. Si proiettano i coefficienti sulle maschere, saturandoli alle maschere stesse

$$\{c_m^{(1)}\} = \Phi_I \circ \{c_m^{(0)}\}$$



5. Si ricomincia dal punto 1 finché non si ha convergenza

La soluzione non esiste sempre (può essere divergente nelle maschere) ma il risultato è il miglior compromesso che si ottiene.

→ ESEMPIO IN MATLAB

Array-pro.m

## ACCOPIAMENTO TRA ANTENNE

Le antenne di un array non sono completamente disaccoppiate, bensì il campo irradiato da ciascuna interagisce con le altre provocando:

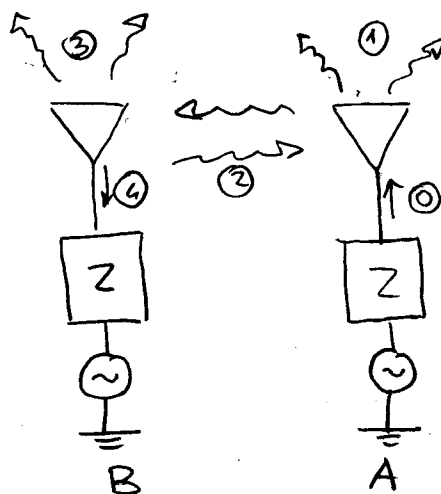
- modifica del diagramma di radiazione delle singole antenne (che quindi sarà diverso dal diagramma dell'antenna isolata)
- modifica dell'impedenza d'ingresso, e quindi delle alimentazioni rispetto ai valori nominali.

Per array di dimensioni finite inoltre non è più neanche lecito considerare che, seppur per antenne tutte uguali, il fattore di elemento  $f_n(\theta, \phi)$  sia lo stesso. Esso infatti, in virtù degli accoppiamenti, dipende dalla posizione dell'antenna nell'array. Elementi che si trovano ai bordi dell'array subiscono sicuramente un coupling diverso dagli elementi che si trovano al centro.

### Meccanismo di Coupling

L'antenna A è alimentata e irradia. Parte del campo finisce nell'antenna B che a sua volta reirradia anche verso l'antenna A.

Il fenomeno si ripete nel tempo.



Di conseguenza l'irradiazione dell'antenna A è dovuta alle seguenti correnti

- 1) correnti eccitate dall'alimentazione di A
- 2) correnti indotte dal backscattering di B
- 3) correnti indotte dall'alimentazione di B

L'accoppiamento dipende pertanto da

- le caratteristiche di radiazione dell'antenna isolata
- le distanze tra le antenne
- l'orientazione reciproca.

Valutare il grado di prestazioni di un'antenna per effetto del mutuo accoppiamento è un problema molto complesso, che generalmente non è risolvibile in maniera analitica, ed è trattato con modelli circuitali e numerici.

Si presenta in seguito il caso semplice di accoppiamento tra dipoli.

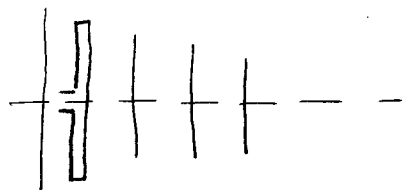
## IMPEDENZA MUTUA TRA DIPOLI

Quando un dipolo (o una qualsiasi altra antenna) inonda non nello spazio libero, ma è presente di un ostacolo o di una antenna, le sue distribuzione di corrente ne risultano modificate come pure le sue impedenza d'ingresso e le caratteristiche di radiazione.

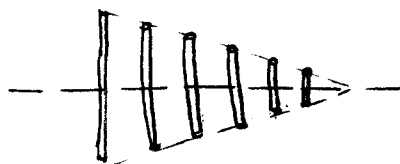
Poiché l'adattamento di un'antenna al generatore dipende dall'impedenza d'ingresso, queste dovranno essere calcolate nelle reali condizioni di funzionamento. Nel caso più generale, le correnti indotte sull'antenna e nell'ambiente circostante possono essere considerate come incognite di un problema integrale risolto globalmente con il metodo dei momenti. Nel caso più semplice di dipoli accoppiati esistono delle formulazioni semi analitiche che permettono facilmente di valutare il mutuo accoppiamento.

Il modello di dipoli accoppiati, dove solo uno è alimentato e gli altri sono passivi, è utile e rappresentativo alcune configurazioni di antenne di seguito descritte

Antenne Yagi-Uda  
(ricezione televisiva)



Log periodica

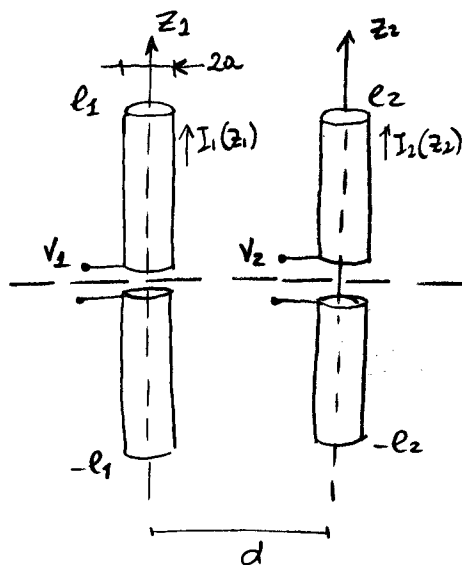


Si considero ora il caso più semplice

si omette

la coppia  $\{l_1, l_2\}$

e le correnti scorrono  
sull'asse dei fili



Il problema viene formulato

come nel caso dell'op. di Poeklington, pensando per i potenziali.

Il campo elettrico incidente sul filo è  $E_{z1}^i$  e si scrive:

$$-j\omega\mu E_{z1}^i = \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + k^2 \right) A_{z1}$$

$A_{z1}$  è il potenziale vettore, valutato sul filo 1, dovuto alle correnti che scorrono sul filo 1 e sul filo 2



$$A_{z_1} = A_{11} + A_{12}$$

$$\bullet A_{11} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-l_1}^{l_1} I_1(z_1') \frac{e^{-j k_0 R_{11}}}{R_{11}} dz_1'$$

potenziale su  $z_1$  generato dalle correnti  $I_1$

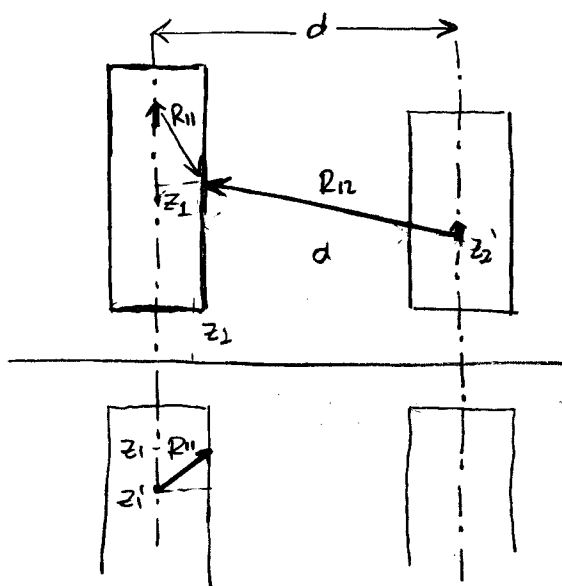
$$\bullet A_{12} = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_{-l_2}^{l_2} I_2(z_2') \frac{e^{-j k_0 R_{12}}}{R_{12}} dz_2'$$

potenziale su  $z_1$  generato dalle correnti  $I_2$

$$R_{11} = \sqrt{(z_1 - z_1')^2 + a^2}$$

$$R_{12} = \sqrt{(z_1 - z_2')^2 + (d - a)^2}$$

due l'epre  $a$  indice il punto di sorgente.



Si ottiene, per  $E_{z_1}$  e per  $E_{z_2}$  le eq. integrali:

$$\left\{ \begin{aligned} -j\omega\mu\epsilon E_{z_1}^i &= \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + k_0^2 \right) (A_{11} + A_{12}) \\ -j\omega\mu\epsilon E_{z_2}^i &= \left( \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + k_0^2 \right) (A_{21} + A_{22}) \end{aligned} \right.$$

con  $A_{21}$  e  $A_{22}$  definiti in  
modo duale

Se il gap di alimentazione nei due dipoli è molto piccolo, è movimento lento pone

$$E_{z_1}^i = +V_1 \delta(z_1)$$

$$E_{z_2}^i = +V_2 \delta(z_2)$$

⇔ Sul filo il campo elettrico è nullo solo nel gap.

(si disenterà successivamente il tipo di chiusura del secondo circuito -c, c/e)

Il precedente sistema di equazioni diventa pertanto:

$$\begin{cases} -j\omega \epsilon \mu_0 V_1 \delta(z_1) = \left( \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} + k_0^2 \right) (A_{11} + A_{12}) \\ -j\omega \epsilon \mu_0 V_2 \delta(z_2) = \left( \frac{\partial^2}{\partial z_2^2} + k_0^2 \right) (A_{21} + A_{22}) \end{cases}$$

sistema di eq. integro differenziali nelle incognite  $I_1$  e  $I_2$  e condizioni al contorno

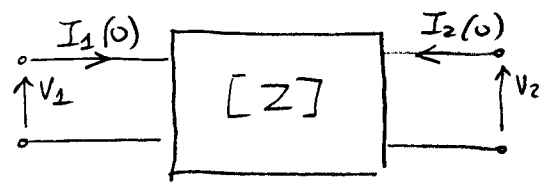
$$I_1(\pm l_1) = I_2(\pm l_2) = 0$$

Il problema può essere risolto con il metodo dei momenti.

Se comunque si considera il sistema di antenne come una rete a due porte (coincidenti con i morsetti dei dipoli),

si può far riferimento ad

una rappresentazione in matrice di impedenza  $[Z]$  della rete



$$(\Delta) \begin{cases} V_1 = Z_{11} I_1(0) + Z_{12} I_2(0) \\ V_2 = Z_{21} I_1(0) + Z_{22} I_2(0) \end{cases}$$

La rete è reciproca quindi  $Z_{12} = Z_{21}$

Autoimpedenza

$$Z_{ii} = \frac{V_i}{I_i(0)} \Big|_{I_j(0)=0}$$

impedenza d'ingresso alla porta #i quando la porta #j è in circuito aperto

Impedenza mutua

$$Z_{ij} = \frac{V_i}{I_j(0)} \Big|_{I_i(0)=0}$$

impedenza d'ingresso alla porta #i quando sulle porta #j sono le correnti  $I_j(0)$

Questa rappresentazione matriciale differisce dalla precedente integrale differenziale perché vede solamente le correnti ai morsetti e non nelle restanti porte del fis.

L'impedenza totale d'ingresso alla porta #1 si ottiene come

$$Z_{s, in} = \frac{V_1}{I_1(0)} = Z_{11} + Z_{12} \left( \frac{I_2}{I_1} \right)$$

Espressione generale dell'impedenza d'ingresso

e quindi dipende da entrambe le correnti

di portò perennite

Cons #2 in corto circuito ( $V_2=0$ )

$$(V_2=0)$$

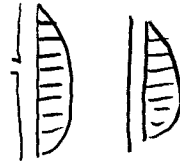
allora

$$I_2(0) = - \frac{Z_{21}}{Z_{22}} I_1(0)$$

$$Z_{s, in} = \frac{V_1}{I_1}$$

$$Z_{s, in} = Z_{11} - \frac{Z_{12}^2}{Z_{22}}$$

(ho usato la reciprocità)  $Z_{12} = Z_{21}$



queste è la grandezza che deve essere considerata per l'adattamento

Caso circuito aperto

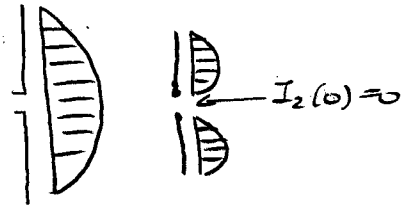
$$I_2(0) = 0$$

ne consegue banalmente che

$$Z_{1, in} = Z_{11}$$

che non significa che il  
dipolo #1 non sente l'effetto del

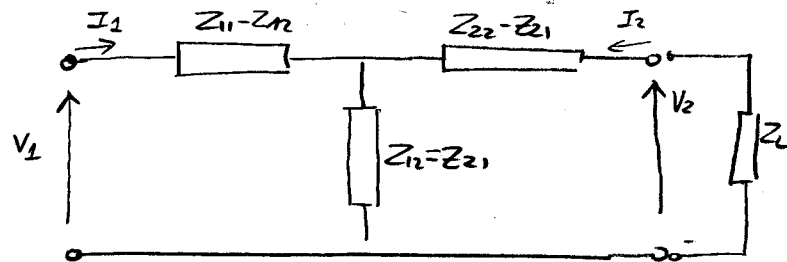
dipolo #2. (e fatto che abbiamo  
entrambe due lunghezze  $\leq \lambda/2$ )  $\triangle$



Caso #2 chiuso su carico  $Z_L$

conviene considerare le relazioni e T delle matrici  
di impedenza

Celso per esercizio  
l'impedenza d'ingresso  
del primo dipolo



$\triangle$  NOTA

In generale  $Z_{11} \neq Z_{11, in}$  (isolato), cioè l'impedenza d'ingresso  
del dipolo isolato, perché sebbene  $I_2(0) = 0$  sul secondo  
dipolo (perennità) sono comunque correnti che modificano la  
distribuzione di campo. Si può approssimare

$Z_{11} \approx Z_{11, in}$  (isolato) quando il perennità è lungo  $\leq \lambda/2$   
e i due dipoli sono separati almeno  $\lambda/5$

## Calcolo $Z_{ij}$

L'impedenza  $Z_{12} = Z_{21}$  dipende dalle posizioni dei dipoli, dalle distanze e dalle lunghezze. Nel caso particolare di dipoli di ugual lunghezza  $l$ , paralleli e posti a distanza  $d$ , si è trovate le relazioni semi-analitiche

$$R_{12} = \frac{\eta_0}{4\pi} [2 Ci(u_0) - Ci(u_1) - Ci(u_2)]$$

$$Z_{12} = R_{12} + j X_{12}$$

$$X_{12} = -\frac{\eta_0}{4\pi} [2 Si(u_0) - Si(u_1) - Si(u_2)]$$

$$u_0 = kd$$

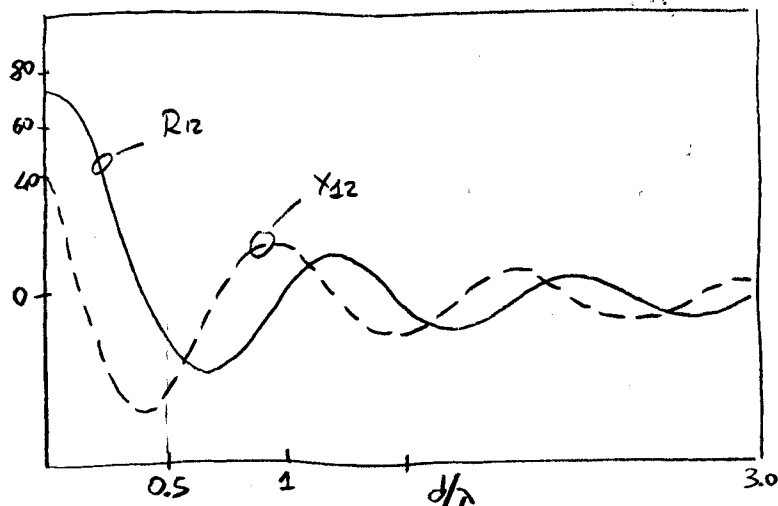
$$u_1 = k(\sqrt{d^2 + l^2} + l)$$

$$u_2 = k(\sqrt{d^2 + l^2} - l)$$

$$Ci(u) = - \int_u^\infty \frac{\cos(\tau)}{\tau} d\tau \quad - \text{coseno integrale}$$

$$Si(u) = \int_0^u \frac{\sin(\tau)}{\tau} d\tau \quad - \text{sinu integrale}$$

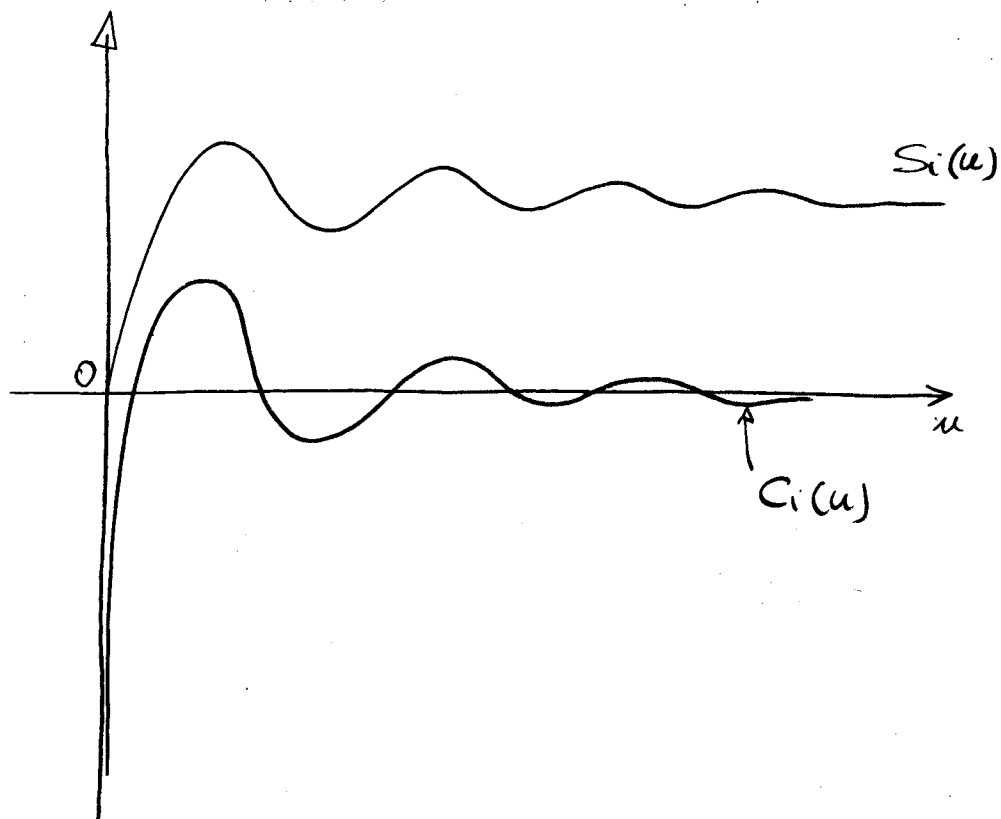
} sono  
tabulate  
(grafici o pag  
seguente)



$$l = \lambda/2$$

$$\Rightarrow Z_{1,21} \rightarrow Z_{11}$$

Come ci si attende, all'aumentare delle distanze  $d$ , l'impedenza  
mutua tende a zero, e i due dipoli diventano isolati. Notare  
comunque che l'attenuazione non è monotona decrescente  
perché?



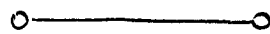
# ACCOPIAMENTO MUTUO E PRESTAZIONI DELL'ARRAY

Alcune definizioni:

**IMPEDENZA PASSIVA** : impedenza d'ingresso di  $m$ -esima antenna inserita in cney quando tutti gli altri elementi sono passivi e terminati sull'impedenza del generatore

**IMPEDENZA ATTIVA** : impedenza vista dal singolo elemento di  $m$ -esima antenna quando tutti gli altri sono elementi.

L'impedenza passiva normalmente è molto poco diversa dall'impedenza d'ingresso dell'antenna isolata.



→ Vari alle trattazione con le matrici di scattering

Per un cney lineare, la tensione sui terminali

dell'antenna  $m$ -esima si può scrivere come

$$V_m = \sum_n Z_{mn} I_n$$

dove, come al solito

$Z_{mn}$  : tensione ai morsetti dell'antenna  $m$ -esima (mutua impedenza) quando sull'antenna  $n$ -esima c'è un generatore unitario di corrente e tutte le altre antenne sono in circuito aperto

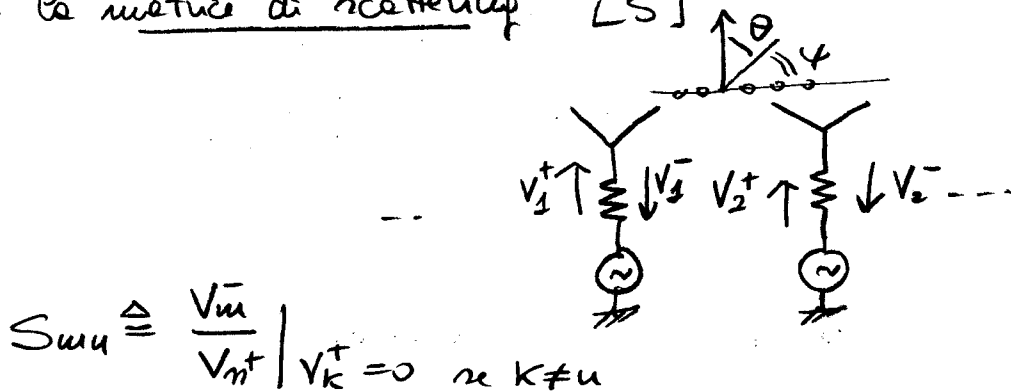
L'impedenza attiva nell'antenna  $m$ -esima si può quindi

esprimere come

$$Z_{m, in} \triangleq \frac{V_m}{I_m} = \sum_n Z_{mn} \frac{I_n}{I_m}$$

# ← TRATTAZIONE CON LA MATRICE [S]

Per un array lineare l'accoppiamento tra le varie alimentazioni può essere modellato anche con la matrice di scattering [S]



$V_i^+$  e  $V_i^-$  sono le tensioni dirette e riflesse alle porte di alimentazione dell'antenna

$$V_{mu}^- = \sum_{n=1}^N S_{mu n} V_n^+ \quad \text{tensione totale riflessa sull'antenna } \mu\text{-ma}$$

La tensione e la corrente di modo sull'antenna  $\mu\text{-ma}$  sono

$$V_{\mu} = V_{\mu}^+ + V_{\mu}^-$$

$$I_{\mu} = I_{\mu}^+ + I_{\mu}^-$$

Si suppone un array con illuminazione uniforme e fessure lineari per ottenere puntamento in  $\theta_0$

$$V_n^+ = V_0 e^{jkd \sin \theta_0} \Rightarrow V_n^+ = V_0 e^{j k n d \sin \theta_0} \quad (*)$$

Si può a questo punto definire il coefficiente di riflessione attivo dell'antenna  $\mu\text{-ma}$

$$T_{\mu}(\theta_0) = \frac{V_{\mu}^-}{V_{\mu}^+} =$$

$$\tau_{\mu} \cdot \hat{e} =$$



$$\Gamma_m(\theta_0) = \frac{\sum_{n=1}^N V_0 e^{-jknd \sin \theta_0} S_{mn}}{V_0 e^{+jknd \sin \theta_0}}$$

$$\Gamma_m(\theta) = e^{jkmd \sin \theta} \sum_{n=1}^N S_{mn} e^{+jknd \sin \theta} = \sum_{n=1}^N S_{mn} e^{-jkd(u-m) \sin \theta}$$

Il coeff. di riflessione attivo dipende dalle posizioni dell'antenna all'interno dell'array, dagli accoppiamenti e dal tipo di alimentazione (puntamento)

Per qualche direzione di puntamento può accadere che  $|\Gamma_m(\theta_0)| = 1$  e quindi l'antenna è diretta

Si può adeno calcolare il campo totale in dietro dell'array

$$\underline{E}^A(\theta) \propto \underline{h}_0(\theta) \sum_{n=1}^N V_m e^{jknd \sin \theta} \frac{e^{-jkn}}{4\pi r}$$

ma  $V_m = V_m^+ + \Gamma_m(\theta_0) V_m^+ = V_m^+ (1 + \Gamma_m(\theta_0))$

$$\underline{E}^A(\theta) \propto \underline{h}_0(\theta) \sum_{n=1}^N V_m^+ (1 + \Gamma_m(\theta_0)) e^{jknd \sin \theta} \frac{e^{-jkn}}{4\pi r}$$

FATTORE DI ARRAY ATTIVO ←

Nella direzione di minimo puntamento ( $\theta = \theta_0$ ), i vari contributi entrano in fase e quindi:

$$\underline{E}^A(\theta_0) \propto V_0 \underline{h}_0(\theta_0) \sum_{n=1}^N (1 + \Gamma_m(\theta_0)) \frac{e^{-jkn}}{4\pi r}$$

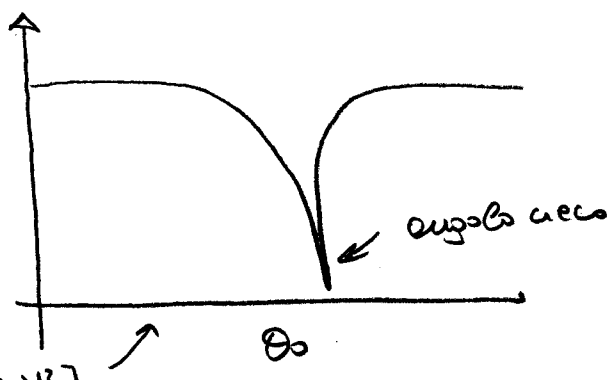
$$= V_0 \underline{h}_0(\theta_0) \left[ N + \sum_{m=1}^N \Gamma_m(\theta_0) \right] \frac{e^{-jkn}}{4\pi r}$$

Si osserva che il campo totale, nella direzione di massimo puntamento differisce dalle somme dei campi mediati dalle antenne (cioè  $E^A(\theta) \neq N E_0(\theta)$ )

(e ciò vale anche per il guadagno) per la presenza del coefficiente di riflessione attivo.

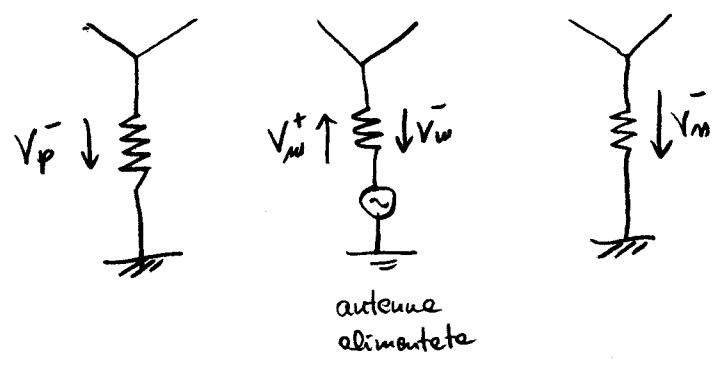
Al variare dell'angolo di puntamento può accadere che  $\sum_n 1 + T_n(\theta) \rightarrow 0$  e quindi possono esistere delle **DIREZIONI CIECHE** (Scan Blindness)

Nel caso di array molto grandi si può assumere che il  $T_n$  sia uguale per tutte le antenne  $T_n(\theta) \sim \Gamma(\theta)$  e si può dimostrare che il guadagno è  $G^A(\theta) = N G_0(\theta) [1 - |\Gamma(\theta)|^2]$



Si può anche definire un fattore di elemento attivo che tiene conto dell'interazione con l'array. È ottenuto accendendo solo l'elemento  $m$ -mo e chiudendo gli altri su terminazione adatte

Fattore di elemento attivo (Embedded pattern)



Bisogna quindi riscrivere il campo totale dell'ondata quando

$$V_m^+ \neq 0$$

$$V_n^+ = 0 \quad \text{se } n \neq m$$

e quindi

$$V_m = V_m^+ + V_m^-$$

$$V_n = V_n^- \quad (\text{le altre antenne hanno solo l'ondata riflessa})$$

$$\begin{aligned} \underline{E}_m(\theta) &\propto \underline{h}_m(\theta) \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \left[ V_m^+ e^{jk_0 d \sin \theta} + \sum_{n=1}^N V_n^- e^{jk_0 n d \sin \theta} \right] \\ &= \underline{h}_m(\theta) \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} V_m^+ e^{jk_0 d \sin \theta} \left[ 1 + \sum_n \frac{V_n^-}{V_m^+} e^{jk_0 (n-m) d \sin \theta} \right] \\ &= \underline{h}_m(\theta) \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} V_m^+ \left[ 1 + \sum_{n=1}^N \underbrace{S_{nm}}_{\substack{S_{mn} \\ \text{(simmetrica)}}} e^{jk_0 (n-m) d \sin \theta} \right] e^{jk_0 d \sin \theta} \\ &\quad \underbrace{\sum_m S_{mm} e^{-jk_0 (m-m) d \sin(-\theta)}}_{\substack{\Gamma(-\theta) \otimes}} \end{aligned}$$

$$\underline{E}_m(\theta) \propto \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} V_m^+ \underbrace{\left[ 1 + \Gamma(-\theta) \right]}_{\substack{\underline{h}_m(\theta) \\ \text{fattore di elemento} \\ \text{attivo}}} e^{jk_0 d \sin \theta} \cdot \underline{h}_m(\theta)$$

$\underline{h}_m(\theta)$  - fattore di elemento attivo

$$\underline{E}_m \propto \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} V_m^+ \left[ 1 + \Gamma(-\theta) \right] e^{jk_0 d \sin \theta} \cdot \underline{h}_m(\theta)$$

venzione di fase dovuta alle posizioni nell'ondata.

questo termine produce una distorsione del diagramma di radiazione delle singole antenne

⊗

NOTA

$\Gamma(-\theta)$  non ha in questo caso il senso fisico di coefficiente di riflessione attivo, ma è semplicemente una funzione angolare

Normalmente l'effetto del coupling viene tenuto in conto "e-posteriori", quando cioè le rete di alimentazione e rete progettate. Vengono introdotte delle modifiche nelle alimentazioni per compensare le deformazioni dovute al coupling.

Quando è possibile vengono introdotti dei setti sull'array per ridurre l'accoppiamento tra le antenne.

Si può fare anche una sintesi con dei vincoli sulle impedenze d'ingresso

Il campo totale si può infatti scrivere in funzione dei fattori di elemento altro

$$\underline{E}^A(\theta) \propto \frac{e^{-jkr}}{4\pi r} \sum_{n=1}^N V_n^+ \underline{h}_n(\theta)$$

Le sintesi delle alimentazioni  $\{V_n^+\}$  può essere quindi eseguita a partire da questa rappresentazione. In tal caso, non potendo definire un fattore di array, è necessario preliminarmente calcolare o misurare i  $\{\underline{h}_n(\theta)\}$ , come da definizione.

Se consideriamo un'illuminazione uniforme del tipo

$$I_m = I_0 e^{j m d}$$

allora

$$Z_{m,im} = \sum_n Z_{mn} e^{j(m-n)d}$$

o anche

$$Z_{m,im} = Z_{mm} + \sum_{n \neq m} Z_{mn} e^{j(m-n)d}$$

↑ termine di auto impedenza  
(simile all'impedenza dell'antenna isolata)

↑ termine di accoppiamento

Se l'array funziona in risonanza ( $\alpha[l]$ ), allora l'impedenza oltre zero con l'angolo di puntamento.

Di conseguenza il coefficiente di riflessione varia, e come comportamento estremo può diventare nullo ( $|\Gamma|=1$ ) e cioè l'array è incapace di trasmettere/ricevere potenza nella posizione angolare  $\psi_1$  tale che  $|\Gamma(\psi_1)|=0$ .

Questo fenomeno è chiamato

SCAN BLINDNESS

## ARRAY PARASSITA

Solo un elemento è alimentato direttamente da un generatore. Viene detto DRIVER.

Gli altri elementi sono passivi e contribuiscono all'irradiazione complessiva per effetto delle correnti su di essi indotte dall'unico elemento alimentato.

L'accoppiamento tra i vari conduttori ricopre quindi un ruolo rilevante.

La fase delle "alimentazioni parassite" è controllata dalla geometria tra gli elementi e dalle loro lunghezze.

Il più comune array parassita è l'antenna YAGI UDA (o diffusa antenna televisiva).

# *Antenne Yagi Uda*

- *la storia*
- *funzionamento*
- *ottimizzazione*
- *programmi di calcolo*

Gaetano Marrocco

---

Gaetano Marrocco

## *Introduzione*



- E' un'antenna molto usata per la trasmissione e ricezione nelle HF(3-30 MHz), VHF (30-300 MHz) e UHF (300-3000 MHz).
- E' molto economica, leggera
- Elevato guadagno
- Banda non elevatissima
- Bassa resistenza di radiazione, aumentabile con opportuni accorgimenti
- E' costituita da un array di dipoli parassiti, in genere non equispaziati e di dimensioni differenti. Un solo elemento è alimentato

---

Gaetano Marrocco

## Storia di un'idea scippata ..

**1926:**

Shintaro **UDA** - assistant professor, Tohoku University, *Journal of Electrical Engineers of Japan* (in giapponese), "On the Wireless Beam of Short Electric Waves"

**1926:**

Hidetsugu **YAGI** (full Professor) & S. **UDA**, Third Pan-Pacific Congress, Tokio

**1926:**

Yagi ottiene un cospicuo finanziamento da un facoltoso uomo d'affari giapponese per sviluppare le ricerche intraprese da UDA

**1928:**

Yagi si reca negli Stati Uniti e presenta la nuova antenna presso l'Institute of Radio Engineers (sezioni di New York, Washington e Hartford)

**1928:**

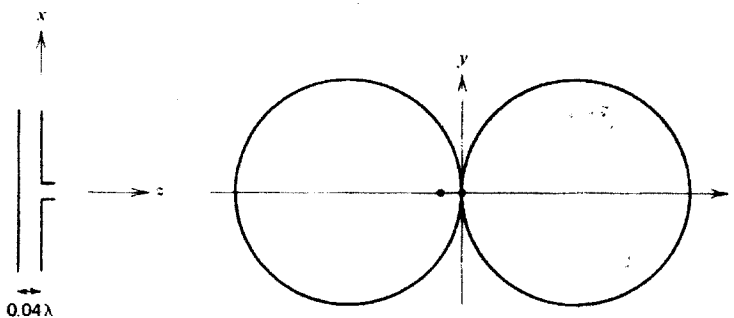
Yagi pubblica il poi famosissimo articolo sui Proceedings of the IRE, "Beam Transmission of Ultra Short Waves".

Nonostante Yagi menzioni che UDA ha già pubblicato ben nove articoli e che la sua ingenuità sia stata la principale responsabile del grande successo dell'antenna, questa viene chiamata **ANTENNA YAGI** per molti anni

Gaetano Marrocco

## Principio di Funzionamento - I

Si considerino due dipoli a  $\lambda/2$  posti molto vicino. Uno solo dei dipoli sia alimentato (**driver**), l'altro è "parassita" cioè irradia in virtù delle correnti indotte su di esso dal primo dipolo



$E_{\text{driver}}$ : campo generato dalle correnti che scorrono sul d. driver nello spazio libero

Sul d. parassita il campo totale deve essere nullo quindi:  $E_{\text{parassita}} = -E_{\text{driver}}$

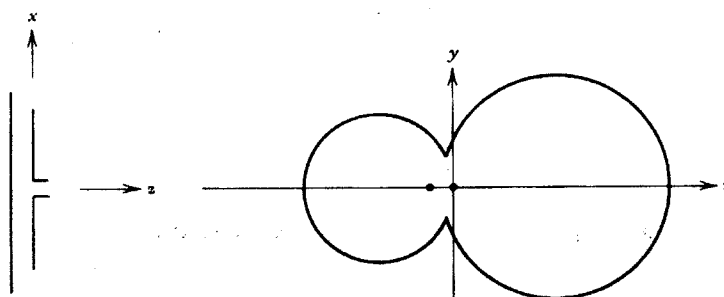
Di conseguenza le correnti che scorrono sul d. parassita sono circa uguali ed opposte a quelle che scorrono sul d. driver. L'array di due elementi ha pertanto un'alimentazione di tipo endfire (un nullo nella direzione broadside)

Gaetano Marrocco



## *Principio di Funzionamento - riflettore*

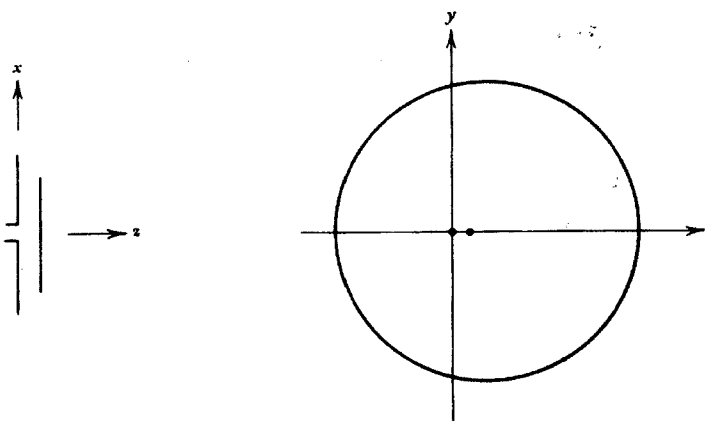
Se il dipolo parassita è più lungo (anche di poco) del dipolo driver allora il lobo principale è ancora posizionato nella direzione endfire nel verso che va dal parassita al driver. Il parassita viene chiamato **riflettore** (simula un piano riflettente)



Gaetano Marrocco

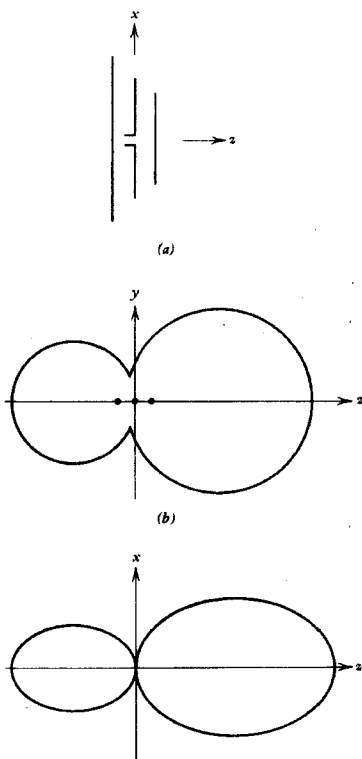
## *Principio di funzionamento - direttore*

Se il dipolo parassita è più corto (anche di poco) del dipolo driver allora la radiazione è rinforzata nel verso che va dal driver al parassita. Il parassita viene chiamato **direttore**



Gaetano Marrocco

## Principio di Funzionamento



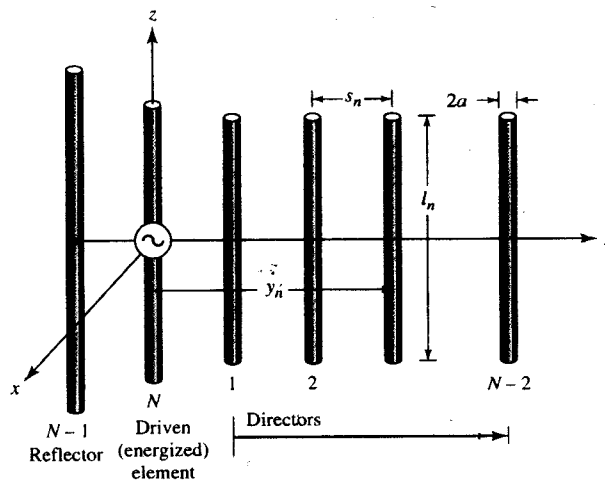
Un miglioramento della direttività si ottiene usando contemporaneamente direttore e riflettore:

- direttività massima ottenibile è 9dB
- $0.15\lambda < d_{\text{ottimo}} < 0.25\lambda$
- driver circa  $\lambda/2$
- direttore circa 5% più corto
- riflettore circa il 5% più lungo

Gaetano Marrocco

## Configurazione tipica

Guadagno maggiore utilizzando più dipoli parassiti



I direttori più lontani dal driver sono meno "energizzati" e quindi contribuiscono meno al guadagno

- un solo riflettore (perchè ?)
- 6-12 direttori

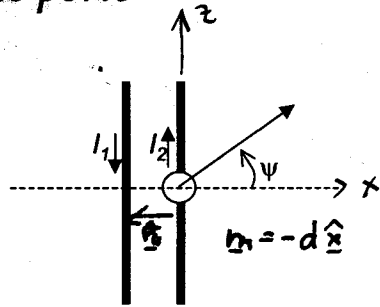
Array di lunghezza tipica di  $6\lambda$

Guadagno di circa 6-9 per lunghezza d'onda (14-17dB su tutta la struttura)

Gaetano Marrocco

## Principio di Funzionamento - Interpretazione a rete a due porte

Si considera la rete equivalente a due porte  
 - porta uno ( $V_1=0, I_1$ ): morsetti parassita  
 - porta due ( $V_2, I_2$ ): driver



$$\begin{cases} 0 = Z_{11}I_1 + Z_{12}I_2 \\ V_2 = Z_{12}I_1 + Z_{22}I_2 \end{cases} \quad \leftarrow \text{dipolo parassita}$$

si possono ricavare le correnti

$$I_1 = -\frac{Z_{12}V_2}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2}$$

$$I_2 = \frac{Z_{11}V_2}{Z_{11}Z_{22} - Z_{12}^2}$$

da cui:  $I_1 = \left(-\frac{Z_{12}}{Z_{11}}\right) I_2 = -\left|\frac{Z_{12}}{Z_{11}}\right| e^{j\alpha d} I_2$

(ritardo/anticipo)

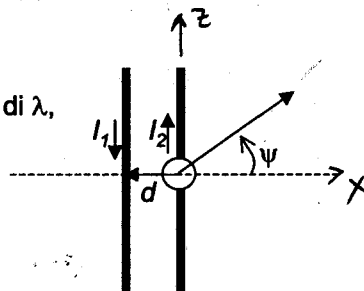
$\alpha$ : fase della corrente indotta rispetto a quella della corrente inducente

differenza di fase tra parassita e driver

Gaetano Marrocco

## Principio di Funzionamento - Interpretazione a rete a due porte

Se i due dipoli hanno lunghezza che differisce di pochi decimi di  $\lambda$ , allora le correnti hanno la stessa forma (ma ampiezza e fase differenti) e si può applicare la teoria degli array:



$$E(r) = \sum_{n=1}^2 I_n \underline{f}(\psi) \frac{e^{-jk_0 r + jk_0 \rho \cdot r_n}}{4\pi r} =$$

$$= \underline{f}(\psi) \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r} \sum_{n=1}^2 I_n e^{jk_0 \rho \cdot r_n}$$

$$F(\psi) = \sum_{n=1}^2 I_n e^{jk_0 \rho \cdot r_n} = I_1 e^{-jk_0 d \cos \psi} + I_2 = I_2 \left( 1 - \left| \frac{Z_{12}}{Z_{11}} \right| e^{j\alpha d - jk_0 d \cos \psi} \right)$$

Per avere puntamento a dritta in  $\psi = 0^\circ$  dovrebbe essere

1) massimo di  $F(\psi)$  in  $\psi = 0 \Rightarrow \alpha d - kd = \pm \pi \quad (2)$

2) nullo di  $F(\psi)$  in  $\psi = \pi \Rightarrow \begin{cases} \alpha d + kd = 0 & (1) \\ |Z_{12}|/|Z_{11}| = 1 & (3) \end{cases}$

Queste condizioni comportano che

(1)  $\rightarrow \alpha = -k \Rightarrow \alpha < 0$

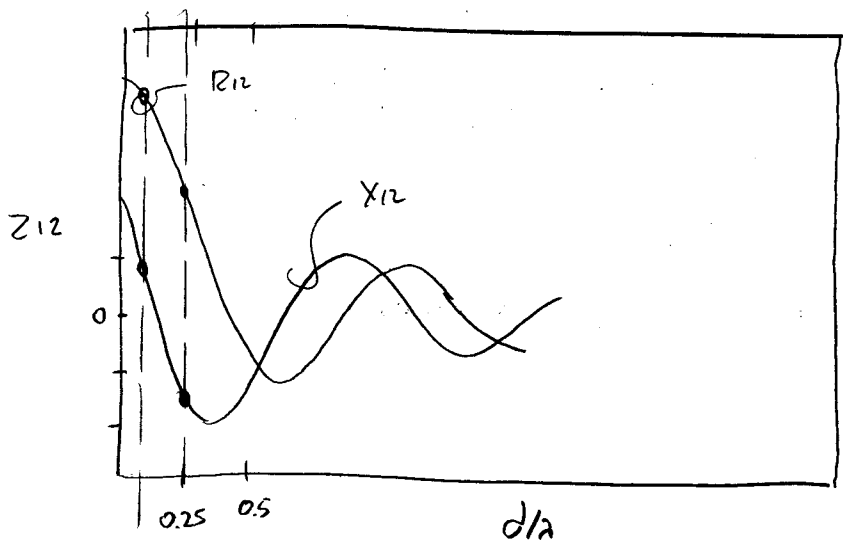
(1), (2)  $\rightarrow 2\alpha d = \pm \pi \Rightarrow \begin{cases} |\alpha d| = \frac{\pi}{2} \\ |kd| = \frac{\pi}{2} \end{cases} \quad e \quad \boxed{d = \frac{\lambda}{4}}$

(3)  $\rightarrow |Z_{11}| = |Z_{12}|$

Se la separazione tra i due dipoli deve essere  $> \lambda/4$  allora la corrente indotta  $I_1$  è bassa,  $|Z_{12}| < |Z_{11}|$  e il conseguente effetto cross è molto modesto. Si preferisce invece orientare il dipolo perennite in modo che  $d \approx 0.15\lambda$ . Ciò comporta una variazione di fase nelle correnti indotte (in quanto  $Z_{12}$  è fortemente dipendente dalle distanze), e quindi del termine  $|\alpha d| < \frac{\pi}{2}$ . Per riequilibrare le relazioni di fase si può agire sulle lunghezze del dipolo perennite che influenza la fase di  $Z_{11}$ . Ricordando che esse

$$\alpha d = \angle Z_{12} / Z_{11}$$

NOTA: non è in genere possibile ottenere  $|Z_{12}| = |Z_{11}|$  e quindi non si ottiene mai in modo perfetto ma solo in valore bene!



quando  $d = \frac{\lambda}{4}$   $X_{12}$  è negativo  $\Rightarrow \angle Z_{12} < 0$   
 atan  $\frac{X_{12}}{R_{12}}$

quando  $d < \frac{\lambda}{4}$  (0,15)  $X_{12}$  è diminuito  
 in modulo  
 e anche  $\alpha$  è potenzialmente diminuito  
 in modulo  
 $\downarrow$   
 Cambiano  $Z_{11}$  e  
 soprattutto  $Z_{12}$   
 $|Z_{12}|$  diminuisce

$$\Rightarrow |\alpha| d < \frac{\pi}{2}$$

↑  
 ve aumentato

ma  $|\alpha| d = \left| \angle \frac{Z_{12}}{Z_{11}} \right|$

essendo fisso  $d$  devo aumentare la fase di  $\angle \frac{Z_{12}}{Z_{11}}$   
 tale fase deve essere molto negativa

- $Z_{12}$  viene pesa con la lunghezza del dipolo
- $Z_{11}$  è invece molto sensibile alla lunghezza del dipolo

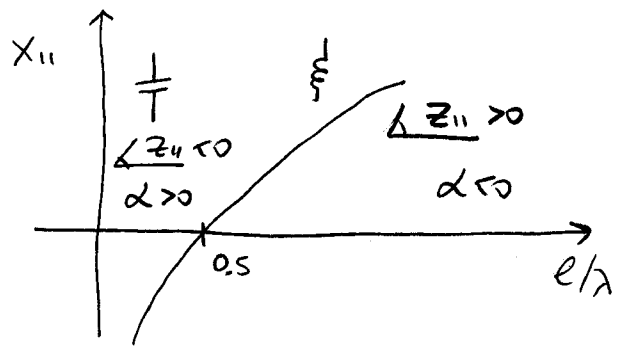
allora è  $\alpha \approx \angle \frac{1}{Z_{11}} = - \angle Z_{11}$

in quanto  $Z_{12}$  è poco sensibile alle lunghezze del perennite.

Si come la spetature  $d < \lambda/4$ , allora  $|\alpha|$  deve aumentare ( $|\alpha d| = \frac{\pi}{2}$ ) e quindi  $\alpha$  deve diminuire (è infatti negativo) e cioè  $\angle Z_{11}$  deve essere positivo.

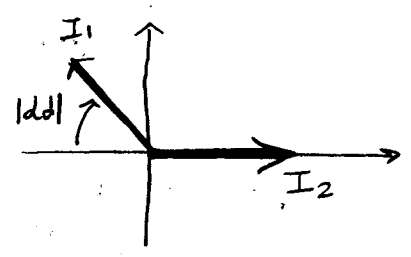
Ma  $Z_{11}$  coincide all'incirca con l'impedenza d'ingresso del dipolo isotro.

Di conseguenza il dipolo perennite deve essere più lungo di  $\lambda/2$  (e quindi più lungo del Driver).



Si comporta quindi come un RIFLETTORE. In altri termini la corrente  $I_1$  deve essere in anticipo rispetto la corrente  $I_2$  inducente. In fatti è

$$I_1 = \left| \frac{Z_{12}}{Z_{11}} \right| e^{j(\pi - |\alpha d|)}$$

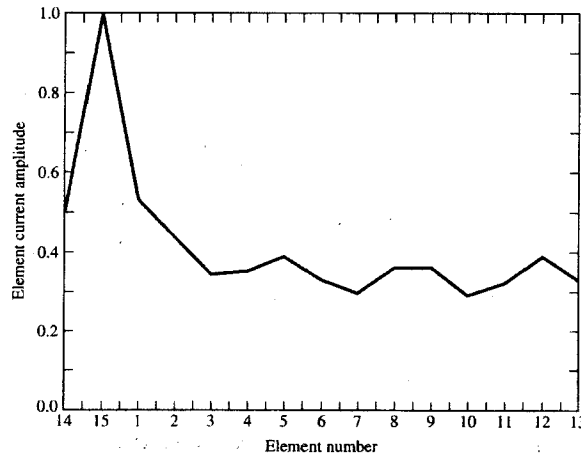


Se invece si richiede che

l'energia abbia comportamento end fire in  $\psi = \pi$ , allora si deduce che  $\alpha d = +\frac{\pi}{2}$  e il dipolo perennite deve essere più corto (DIRETTORE) del dipolo alimentato.

## Configurazione di corrente

Yagi-Uda di 15 elementi



La corrente sui ~~direttori~~ <sup>direttori</sup> contigui è quasi costante e pertanto viene guidata da questi (Canale d'onda - Uda)

Si comporta come un array endfire ad onda progressiva (slow wave)

Gaetano Marrocco

## Parametri significativi

- guadagno avanti e indietro
- ☹ • impedenza d'ingresso (in genere è bassa, può essere aumentata usando come driver un dipolo ripiegato ( $R_{in}=300 \Omega$ ))
- larghezza di banda (circa 2%)
- rapporto davanti-dietro (si può arrivare a circa 15dB)
- livello dei lobi secondari (30% del lobo principale)

\* per effetto dell'accoppiamento con i dipoli parassiti

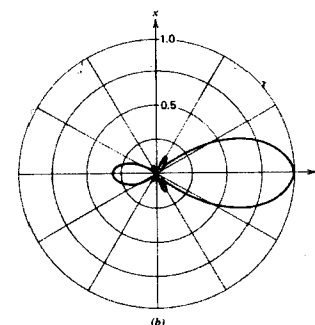
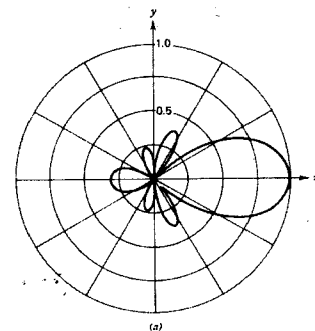


Figure 5-33 Six-element Yagi-Uda antenna for TV Channel 15 (Example 5-1). See Fig. 5-31 and (5-46) for the antenna geometry. (a)  $H$ -plane pattern. (b)  $E$ -plane pattern.

Gaetano Marrocco

## Geometria e parametri d'antenna

Le prestazioni dell'antenna Yagi-Uda dipendono da:

**riflettore:** lunghezza e distanza

- poca influenza sul guadagno in avanti
- grande influenza sul guadagno indietro e su Zin

**tipo di driver:**

- larghezza di banda
- impedenza d'ingresso
- è in genere risonante

**Non esistono formule semplici per il progetto:**

dimensionamento con metodi numerici (ottimizzazione)

**direttori :**

- guadagno in avanti
- impedenza d'ingresso
- sono l'elemento più critico dell'antenna (possono essere non equispaziati e non della stessa lunghezza)

Gaetano Marrocco

## Spaziatura riflettore-feed

15 elementi

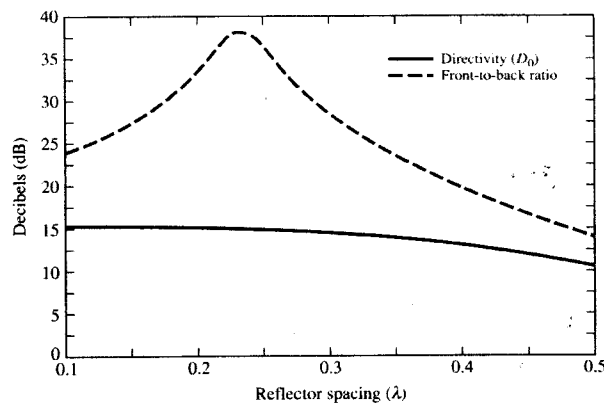


Figure 10.21 Directivity and front-to-back ratio, as a function of reflector spacing, of a 15-element Yagi-Uda array.

- il massimo rapporto avanti-indietro si ha per una spaziatura di  $0.23\lambda$
- la direttività decresce invece monotonamente all'aumentare della spaziatura

*perché ?*

Gaetano Marrocco



## Spaziatura direttori

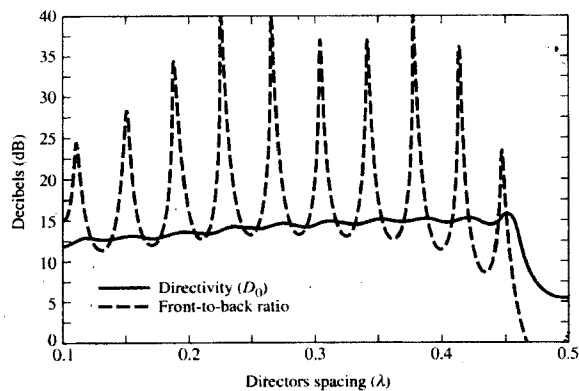


Figure 10.22 Directivity and front-to-back ratio, as a function of director spacing, for 15-element Yagi-Uda array.

Forte variabilità del rapporto fronte-retro (soprattutto per un numero elevato di direttori)

La direttività cambia poco finché la spaziatura è inferiore a  $0.45\lambda$ , poi decade drasticamente (i direttori sono poco energizzati dal driver e si genera un regime di onde stazionarie lungo i direttori per cui ciascun direttore viene a trovarsi in un nodo e si accoppia poco al campo)

=> verifica modello NEC

Gaetano Marrocco

## Ottimizzazione

No

Spaziatura e lunghezza non uniforme dei direttori

Tecniche iterative spesso basate su algoritmi genetici: Yagi-Opt

### perturbazione della spaziatura

tieni fissa la lunghezza e la posizione del riflettore  
tieni fissa la lunghezza dei direttori  
varia la spaziatura tra i direttori fino a massimizzare la direttività

### perturbazione della lunghezza

tieni fissa la lunghezza e la posizione del riflettore  
tieni fissa la spaziatura tra i direttori  
varia la lunghezza dei direttori fino a massimizzare la direttività

### perturbazione della spaziatura e della lunghezza

tieni fissa la lunghezza e la posizione del riflettore  
tieni fissa la lunghezza tra i direttori  
1. varia la spaziatura tra i direttori fino a massimizzare la direttività  
2. varia a questo punto la sola lunghezza dei direttori per massimizzare ulteriormente la direttività

Gaetano Marrocco

# Ottimizzazioni - esempio

## Yagi-Uda di 6 elementi

- miglioramento nella direttività
- miglioramento nel rapporto front-back

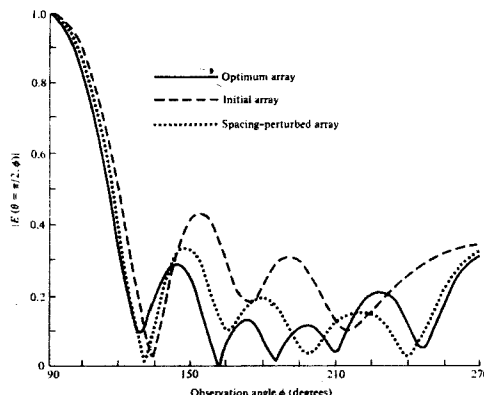


Figure 10.23 Normalized amplitude antenna patterns of initial, perturbed, and optimum six-element Yagi-Uda arrays (Table 10.4). (SOURCE: C. A. Chen and D. K. Cheng, "Optimum Element Lengths for Yagi-Uda Arrays," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. AP-23, pp. 8-15, January 1975. © (1975) IEEE)

Table 10.4 DIRECTIVITY OPTIMIZATION FOR SIX-ELEMENT YAGI-UDA ARRAY (PERTURBATION OF DIRECTOR SPACINGS AND ALL ELEMENT LENGTHS),  $a = 0.003369\lambda$

	$l_1/\lambda$	$l_2/\lambda$	$l_3/\lambda$	$l_4/\lambda$	$l_5/\lambda$	$l_6/\lambda$	$s_{21}/\lambda$	$s_{32}/\lambda$	$s_{43}/\lambda$	$s_{54}/\lambda$	$s_{65}/\lambda$	Directivity (dB)
INITIAL ARRAY	0.510	0.490	0.430	0.430	0.430	0.430	0.250	0.310	0.310	0.310	0.310	10.93
ARRAY AFTER SPACING PERTURBATION	0.510	0.490	0.430	0.430	0.430	0.430	0.250	0.289	0.406	0.323	0.422	12.83
OPTIMUM ARRAY AFTER SPACING AND LENGTH PERTURBATION	0.472	0.452	0.436	0.430	0.434	0.430	0.250	0.289	0.406	0.323	0.422	13.41

SOURCE: C. A. Chen and D. K. Cheng, "Optimum Element Lengths for Yagi-Uda Arrays," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. AP-23, pp. 8-15, January 1975. © (1975) IEEE.

Gaetano Marrocco

# Ottimizzazione in banda

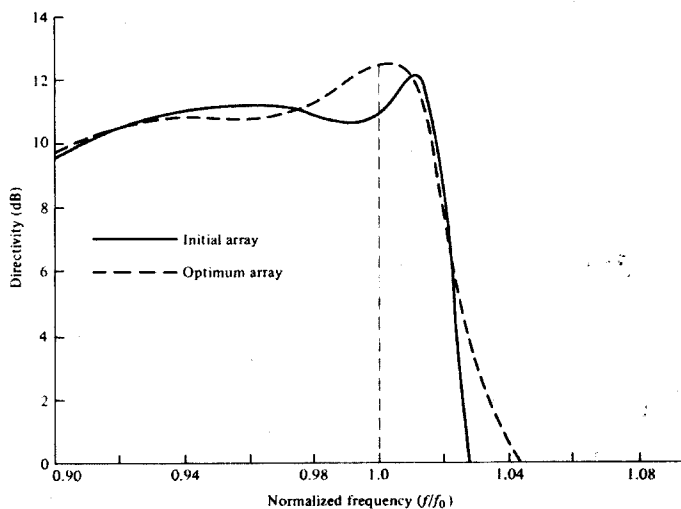


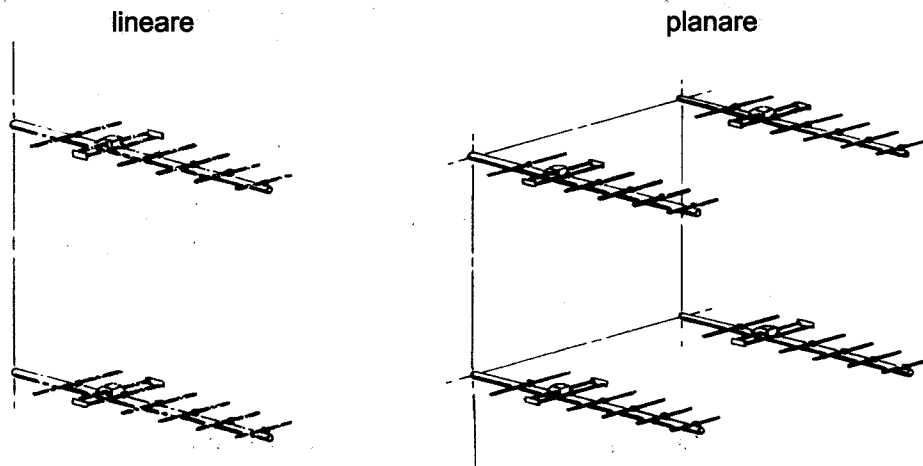
Figure 10.24 Bandwidth of initial and optimum six-element Yagi-Uda array with perturbation of all element spacings (Table 10.2). (SOURCE: N. K. Takla and L.-C. Shen, "Bandwidth of a Yagi Array with Optimum Directivity," *IEEE Trans. Antennas Propagat.*, Vol. AP-25, pp. 913-914, November 1977. © (1977) IEEE)

Comportamento p.basso:  
all'aumentare della frequenza i dipoli diventano più lunghi ma anche più lontani  
(diminuisce l'interferenza costruttiva)

Gaetano Marrocco

## Altre configurazioni

### Array di Yagi-Uda

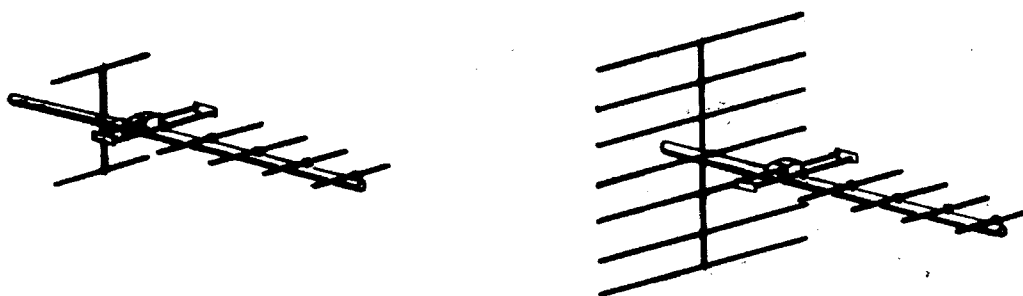


Con una opportuna spaziatura si può riuscire ad ottenere un guadagno fino ad  $N$  volte quello della singola antenna (meno le perdite dovute alla rete di distribuzione)

Gaetano Marrocco

## Altre configurazioni

### Riflettore a schermo

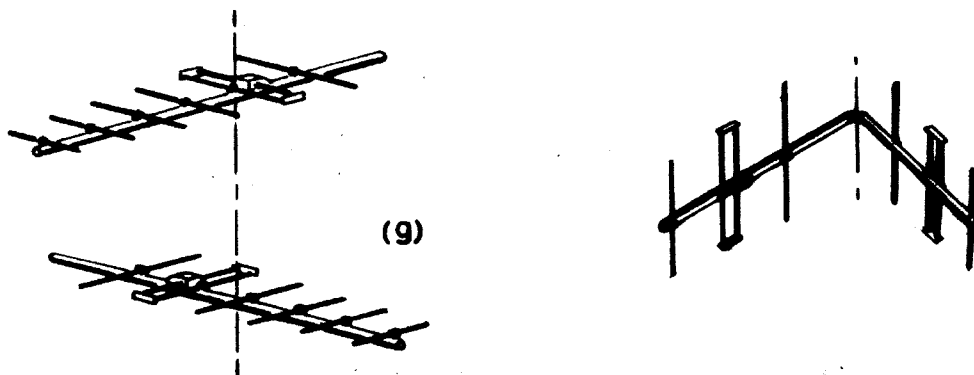


Aumenta l'attenuazione del back lobe ed aumenta il guadagno (su una banda più larga)  
 - rapporto front to back fino a 40 dB  
 - effetto "piano di massa"

Gaetano Marrocco

## Altre configurazioni

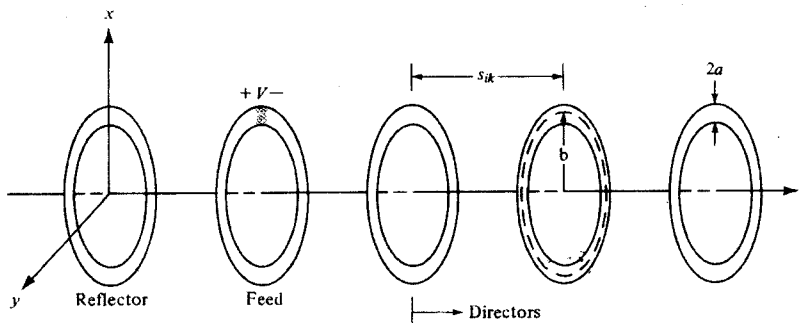
### Polarizzazione circolare



Coppia di antenne montate su uno stesso supporto, orientate di un angolo retto ed alimentate in quadratura

Gaetano Marrocco

## Yagi-Uda a loop



Viene costruito con loop di perimetro pari circa ad una lunghezza d'onda. In tal caso ciascun loop irradia lungo il suo asse.

Le caratteristiche radiative dell'array parassita di loop sono meno sensibile alla presenza del suolo rispetto alla Yagi-Uda a dipoli

→ La configurazione riflettore-driver ha un guadagno più alto (+1.8dB) rispetto la corrispondente configurazione a dipoli

Lungo l'asse dell'array, il campo radiato è polarizzato linearmente

Gaetano Marrocco

# Yagi-Uda a loop

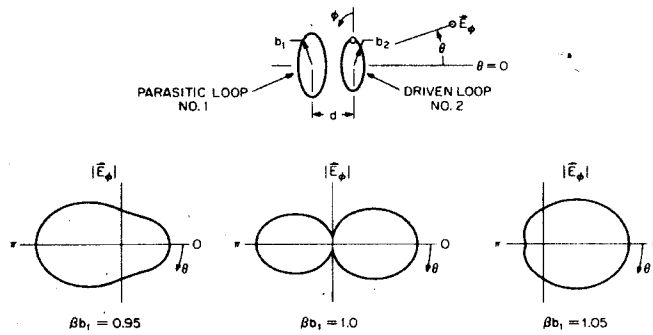


FIG. 5-20 Far-zone electric field patterns  $|\mathbf{E}_\phi|$  in plane  $\phi = 0, \pi$  for driven loop with single parasite,  $\beta b_2 = 1.0$ ,  $d/\lambda = 0.1$ ,  $\Omega_1 = \Omega_2 = 20$ .

**Driver:**  $C_D = 2\pi b_D \approx 1.1\lambda$  (condizione di risonanza, è puramente resistivo)

**Riflettore:**  $C_R = 2\pi b_R \approx 1.05\lambda$  (influenza principalmente la back radiation e la  $Z_{in}$ )

**Riflettore-Driver**  $\approx 0.1\lambda$

**Direttori:**  $C_D = 2\pi b_D \approx 0.7\lambda$

**Direttore-Direttore**  $\approx 0.25\lambda$

**NB** || *E' stato sperimentato che si ottengono risultati ottimali per riflettore e direttore ambedue più piccoli del driver.*

Il raggio a dei vari elementi è costante ed è tale da assicurare il massimo di larghezza di banda:

$$\Omega = 2 \ln(2\pi b_D / a) = 11$$

Gaetano Marrocco

# Yagi Uda a loop

$d/\lambda = 0.2$

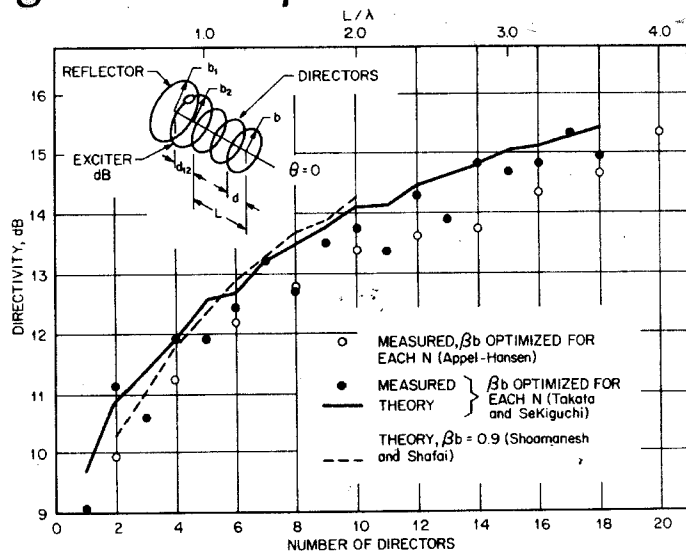


FIG. 5-21 Directivity of Yagi-Uda array of circular-loop antennas for  $\theta = 0$  versus number of directors, director spacing  $d/\lambda = 0.2$ .

Come per un qualunque array, la direttività dipende dalla lunghezza elettrica  $L/\lambda$  dell'antenna (L distanza tra driver e ultimo direttore)

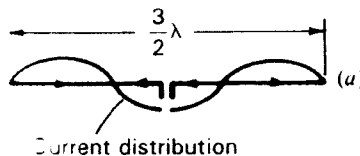
- spaziatura
- numero di direttori

Quanti più saranno i direttori (entro la lunghezza L) quanto più piccolo dovrà essere il loro perimetro

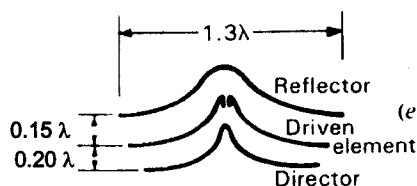
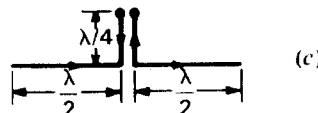
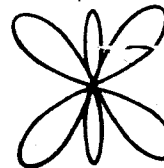
Gaetano Marrocco

## Yagi a dipoli sagomati (Landsdorfer)

Guadagno: 11.5 dB  
(meglio di quanto si possa fare con dipoli)



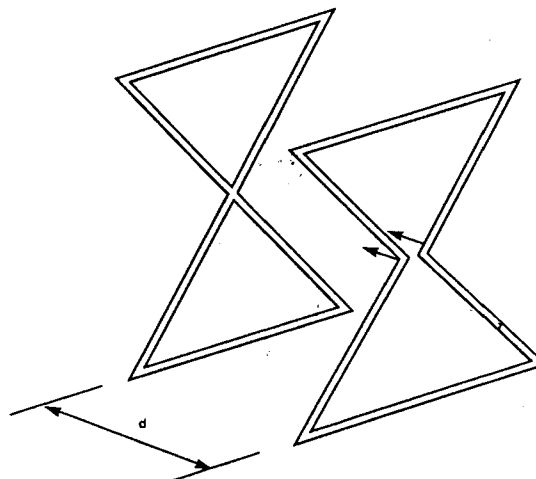
Field patterns



Gaetano Marrocco

## Yagi a Delta loop

- banda più larga che nel caso dei dipoli dritti
- l'elemento parassita è costituito da due triangoli equilateri di perimetro  $C_{par}$
- $0.5\lambda < C_{par} < 0.9\lambda$ : direttore
- $\lambda < C_{driv} < 2\lambda$  riflettore
- Si ottiene un guadagno di 7 dB su un'ottava di banda per  $C_{par}/C_{driv}=1.1$



Gaetano Marrocco

# Yagi: cubic quad

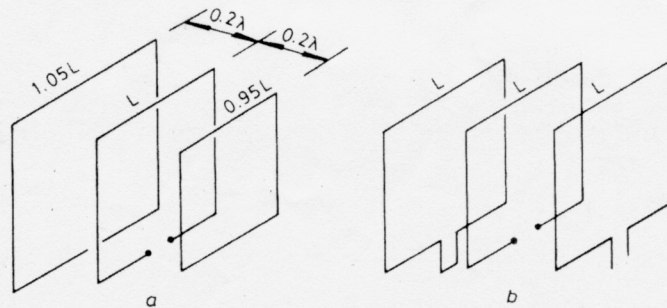
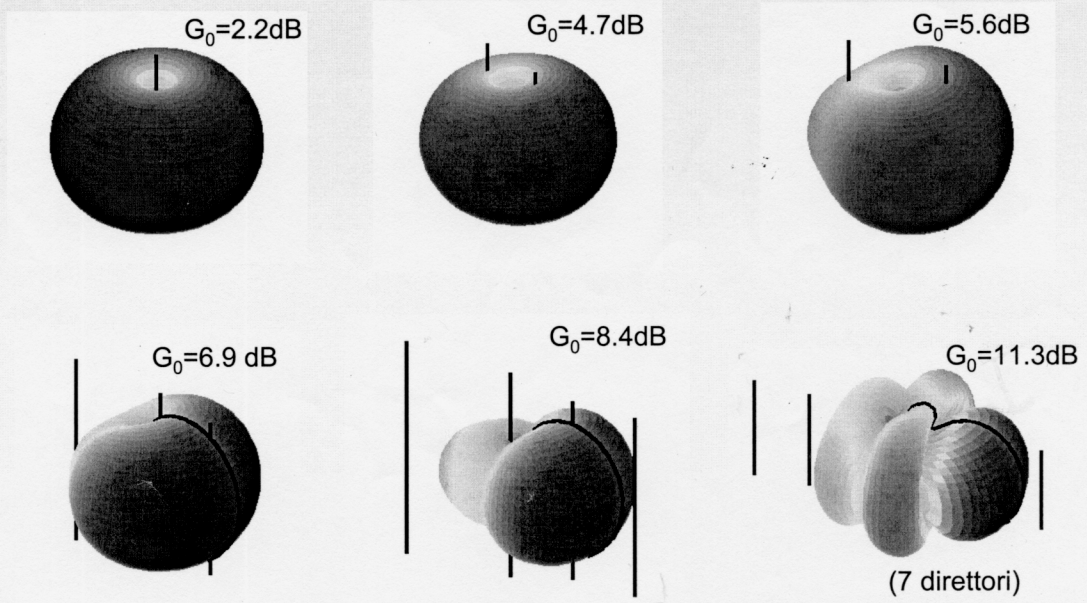


Figure 7.13 Two forms of 3-element quad

- usata in ambiente radioamatoriale ( contenuta in una cassetta!)
- guadagno tipico di 7 dB per una dual quad  $\lambda/4$  e 12dB per una dual quad a  $\lambda/2$
- possibilità di tuning (nel caso di loop tutti uguali) con stab a filo

Gaetano Marrocco

# Modelli NEC



Gaetano Marrocco

SOLO perché era brutto

finire a 99.