IRRADIAZIONE DA CORRENTI
(Potenziali Elettrodinamici)

Si suppongo di essere in un mezzo isotropo e omogeneo. Le equazioni di Maxwell si riscrivono, in presenza di sole sorgenti elettriche come

(1) $\nabla \times \underline{E} = -j\omega \underline{B} \equiv -j\omega\mu \underline{H}$

(2) $\nabla \times \underline{H} = j\omega \underline{D} + \underline{J} \equiv j\omega\epsilon \underline{E} + \underline{J}$

(3) $\nabla \cdot \underline{D} = \rho \implies \nabla \cdot \underline{E} = \frac{1}{\epsilon}\rho$

(4) $\nabla \cdot \underline{B} = 0 \implies \nabla \cdot \underline{H} = 0$

(5) $\nabla \cdot \underline{J} + j\omega\rho = 0$ Conservazione della carica

$\underline{D} = \epsilon \underline{E}$

$\underline{B} = \mu \underline{H}$

relazioni costitutive

E facile vedere che per via della (5), le equazioni alle divergenze sono deducibili a partire da quelle ai rotori.

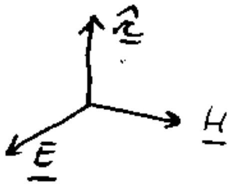
Le prime due equazioni rappresentano quindi un sistema di 6 equazioni differenziali in $\{E_x - E_z\}$ e $\{H_x - H_z\}$ in tutti i punti dello spazio, con termine noto la densità di corrente $\underline{J}$ ← (impressa, indotta, equivalente immagine) ..

Le 6 equazioni vanno completate dalle condizioni al contorno che specificano cosa accade all'infinito. Tale condizione è detta

CONDIZIONE DI RADIAZIONE DI SOMMERFELD

$$\lim_{r\to\infty} r\left(\underline{E} - \eta_0\, \underline{H} \times \hat{r}\right) = 0 \qquad \eta_0 = 120\pi$$

a grande distanza dalla sorgente le ampiezze di campo si attenuano con la distanza e campi elettrici e magnetici sono localmente tra loro ortogonali e si comportano come un'onda piana



Il set di equazioni differenziali non è in genere risolvibile in maniera semplice, e si ricorre quindi ad un procedimento indiretto basato sulla teoria

POTENZIALI ELETTRODINAMICI

Dalla (4) $\nabla \cdot \underline{B} = 0$ si deduce che $\underline{B}$ è un vettore solenoidale e quindi può essere espresso come rotore di un vettore

$\underline{B} = \nabla \times \underline{A}$ $\qquad \underline{A}$ = potenziale magnetico vettore

(5) $\underline{H} = \frac{1}{\mu} \nabla \times \underline{A}$

è facile verificare con le proprietà degli operatori vettoriali che

$$\nabla \cdot (\nabla \times \underline{A}) = 0$$

Si ricorda che un qualunque vettore può essere decomposto in una parte irrotazionale ed una parte solenoidale

$$\underline{A} = \underline{A}_{irr} + \underline{A}_{sol} \qquad A_{irr} = f_1(\nabla\cdot\underline{A})$$

$$A_{sol} = f_2(\nabla\times\underline{A})$$

di conseguenza per assegnare in maniera univoca un vettore bisogna specificarne il rotore e la divergenza. Resta quindi ancora da specificare la divergenza del nostro potenziale vettore. Si otterrà tra poco questa condizione.

Introducendo la (6) nella (1) si ottiene

$$(7) \quad \nabla\times E = -j\omega\,\nabla\times\underline{A} \quad\Rightarrow\quad \nabla\times(\underline{E}+j\omega\underline{A}) = 0$$

Il vettore $\underline{E}+j\omega\underline{A}$ è irrotazionale (conservativo) e quindi può essere espresso come gradiente di uno scalare

$$\underline{E} + j\omega\underline{A} = -\nabla\phi \qquad \phi: \text{ potenziale scalare}$$

Si noti che per $\omega\to 0$ $\underline{E} = -\nabla\phi$ caso statico.

$$(8) \quad \underline{E} = -j\omega\underline{A} - \nabla\phi$$

A questo punto si introducono la (8) e la (6) nella (2)

$$\nabla\times\left(\frac{1}{\mu_0}\nabla\times\underline{A}\right) = j\omega\epsilon(-j\omega\underline{A}-\nabla\phi)+J$$

$$\nabla\times\nabla\times\underline{A} = \nabla\nabla\cdot\underline{A} - \nabla^2\underline{A}$$

$$(8bis) \quad \nabla^2\underline{A} + k_0^2\underline{A} = +\mu_0\underline{J}\;\nabla(\nabla\cdot\underline{A} + j\omega\mu_0\epsilon_0\phi)$$

$k_0^2 = \omega^2\mu\epsilon$ costante di propagazione

A questo punto si ricorda che bisogna assegnare la divergenza del potenziale $\underline{A}$ e, per semplificare l'equazione precedente, è conveniente la seguente scelta

(9) $$\nabla \cdot \underline{A} + j\omega\mu_0\epsilon_0 \phi = 0$$ CONDIZIONE DI LORENTZ

che rende interdipendenti il potenziale scalare e quello vettore

(10) $$\phi = -\frac{1}{j\omega\mu_0\epsilon_0} \nabla \cdot \underline{A}$$

L'equazione (9) diventa pertanto una equazione nella sola incognita $\underline{A}$

(11) $$\boxed{\nabla^2 \underline{A} + K_0^2 \underline{A} = -\mu_0 \underline{J}_0}$$ Equazione di Helmholtz non omogenea

$$\underline{A} \leftarrow \underline{J}$$

Sono tre equazioni differenziali del secondo ordine non più accoppiate

$$\begin{cases} \nabla^2 A_x + K_0^2 A_x = -\mu_0 J_{0x} \\ \nabla^2 A_y + K_0^2 A_y = -\mu_0 J_{0y} \\ \nabla^2 A_z + K_0^2 A_z = -\mu_0 J_{0z} \end{cases}$$

Si ricorda che $\nabla^2 A_x = \frac{\partial^2}{\partial x^2} A_x + \frac{\partial^2}{\partial y^2} A_y + \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_z$

E' importante osservare che il potenziale vettore è in ogni punto dello spazio parallelo alla sorgente di corrente.

$$\underline{A} \parallel \underline{J}_0$$

Quindi se la corrente è per esempio un filamento orientato lungo $\hat{z}$ è

$$\underline{A} = A_z \hat{\underline{z}}$$

Questa proprietà non è invece valida per i campi, per effetto della presenza del rotore che combina le varie componenti.

$$\underline{E} \not\parallel \underline{J}$$

L' eq. (10) posta in (8) permette di esprimere il campo elettrico in funzione del solo potenziale vettore

$$(12) \begin{cases} \underline{E} = -j\omega \underline{A} + \frac{1}{j\omega\mu_0\varepsilon_0} \nabla\nabla\cdot\underline{A} \\ \underline{H} = \frac{1}{\mu_0} \nabla\times\underline{A} \end{cases}$$

compaiono derivate seconde

$$\underline{J} \longrightarrow \underline{A} \longrightarrow \begin{Bmatrix} \underline{E} \\ \underline{H} \end{Bmatrix}$$

Si può infine verificare, utilizzando l'eq. (1), che il potenziale scalare è soluzione della seguente equazione di Helmoltz

$$\nabla^2 \phi + k_0^2 \phi = -\frac{\rho}{\epsilon_0}$$

si tratta di una equazione scalare.

<u>NOTA</u>: può essere utile risolvere sia l'equazione del potenziale scalare che magnetico in modo da evitare, nel calcolo di $\underline{E}$ e derivate doppie.

Potenziale elettrico vettore

Qualora siano presenti solo sorgenti magnetiche

$\underline{M}$ e ρ_m $\qquad (\underline{J}=0,\ \rho=0)$

si può applicare un procedimento del tutto duale, introducendo un potenziale elettrico vettore da

$$\nabla \cdot \underline{D} = 0 \quad \Rightarrow \quad \underline{E} = -\frac{1}{\epsilon} \nabla \times \underline{F}$$

potenziale elettrico vettore

$\underline{F}$ risulta soluzione di una equazione di Helmoltz non omogenea nel termine noto $\underline{M}$

$$\nabla^2 \underline{F} + k_0^2 \underline{F} = -\epsilon_0 \underline{M} \tag{13}$$

Il campo magnetico può essere espresso come

$$(14) \quad \underline{H} = -j\omega \underline{F} + \frac{1}{j\omega \mu_0 \varepsilon_0} \nabla \nabla \cdot \underline{F}$$

Nel caso siano contemporaneamente presenti sorgenti elettriche e magnetiche, i due problemi possono essere risolti separatamente e poi si applica la sovrapposizione degli effetti.
Il campo risultante è la somma dei campi associati alle sole sorgenti magnetiche e alle sole sorgenti elettriche

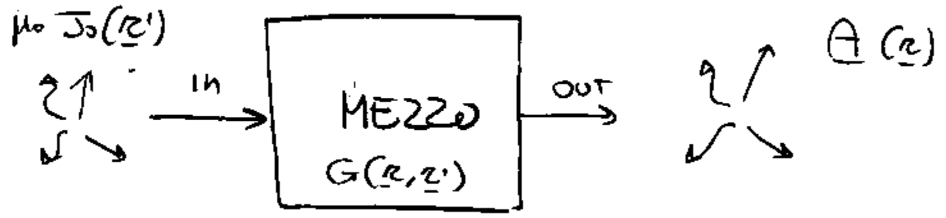
$$\underline{E}^{TOT} = \underline{E}(\underline{J}) + \underline{E}(\underline{M})$$

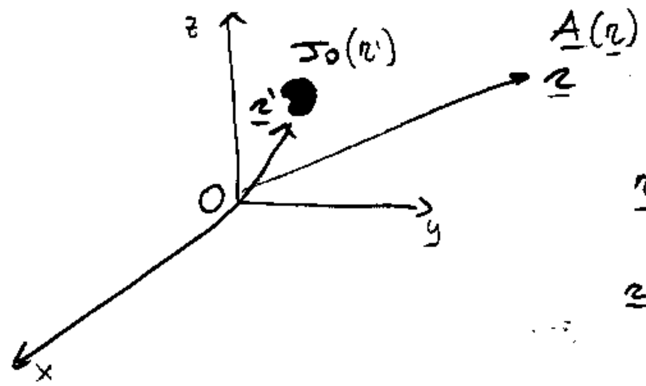
$$\begin{array}{cc} \uparrow & \uparrow \\ \underline{A}(\underline{J}) & \underline{F}(\underline{M}) \\ \uparrow & \uparrow \\ \underline{J} & \underline{M} \end{array}$$

FUNZIONE DI GREEN

Supponiamo di considerare lo spazio sede dell'irradiazione delle correnti come un sistema lineare stazionario. L'irradiazione può essere pertanto descritta con il formalismo della Teoria dei Sistemi

$$(\nabla^2 + k_0^2)\underline{A} = -\mu_0 \underline{J}$$





$\underline{r}$: vettore punto di osservazione

$\underline{r}'$: vettore punto di sorgente.

In un sistema lineare stazionario, l'uscita può essere correlata all'ingresso tramite la risposta impulsiva di tale sistema

$$G(\underline{r}-\underline{r}')$$

FUNZIONE DI GREEN

osservazione sorgente

$$\underline{A}(r) = \left[G * \mu_0 \underline{J}_0(r')\right](\underline{r})$$

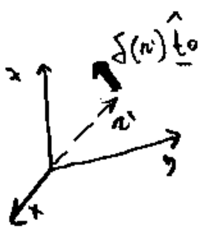
$$= \mu_0 \int_V G(r-r')\, J_0(r')\, dr'$$

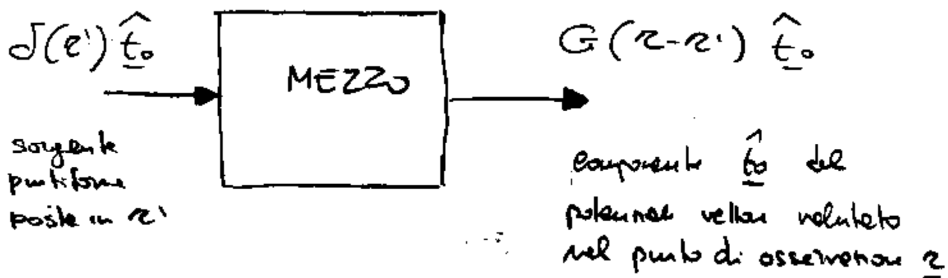
convoluzione nello spazio

Si noti che la risposta impulsiva, se siamo in un mezzo omogeneo isotropo, deve necessariamente essere uno scalare perché

$$\underline{A} \parallel \underline{J}_0$$

Per definizione la risposta impulsiva di un sistema corrisponde alla sua uscita quando in ingresso c'è una Delta di Dirac e come tale viene calcolata





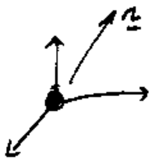
Dall'equazione di Helmholtz per i potenziali si passa all'equazione scalare di Green

$$\boxed{\nabla^2 G + k_0^2 G = -\delta(r)}$$

Eq. di Green scalare

impulso centrato in $\underline{r}=0$

uscita nel generico punto $\underline{r}$



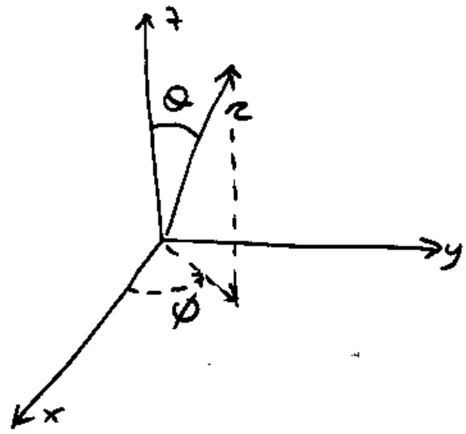
Poichè la sorgente impulsiva è puntiforme, è ragionevole cercare una soluzione <u>isotropa</u>, cioè che non dipende dall'angolo di osservazione ma solo dalla distanza tra punto di sorgente e punto di osservazione (r). Conviene allora lavorare in <u>coordinate sferiche</u>:

$$\nabla^2 G = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial G}{\partial r}\right) + \frac{1}{r^2\sin\vartheta}\frac{\partial G}{\partial \vartheta}\left(\sin\vartheta\frac{\partial G}{\partial \vartheta}\right) + $$

$$+ \frac{1}{r^2\sin^2\vartheta}\frac{\partial^2 G}{\partial \phi^2}$$

Nell'ipotesi precedente si pone

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta} = \frac{\partial}{\partial\phi} = 0$$



per cui l'equazione di Green scalare si riduce a

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial G}{\partial r}\right) + K_0^2 G = -\delta(r)$$

per $r \neq 0$ (cioè $r>0$)

$$\frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial G}{\partial r}\right) + K_0^2 G = 0$$

Equazione omogenea

si applica la sostituzione di variabile

$$u = rG \quad \Rightarrow \quad G = \frac{u}{r}$$

$$\frac{\partial u}{\partial r} = r\frac{\partial G}{\partial r} + G$$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = r\frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + 2\frac{\partial G}{\partial r}$$

$$\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} = \frac{\partial^2 G}{\partial r^2} + \frac{2}{r}\frac{\partial G}{\partial r} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial G}{\partial r}\right)$$

pertanto l'equazione di Helmholtz diventa $\frac{1}{r}\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + k_0\frac{u}{r} = 0$

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2} + k_0^2 u = 0$$

è l'equazione delle onde che ammette soluzione

$$u = a e^{-jkr} + b e^{+jkr}$$

$$G(r) = \frac{a}{r} e^{-jkr} + \frac{b}{r} e^{+jk_0 r}$$

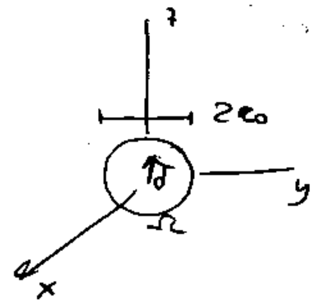
Non si considera l'onda che dall'infinito va verso l'antenna e quindi

$$G(r) = \frac{a}{r} e^{-jk_0 r}$$

Bisogna ora determinare la costante a

A tal fine si osserva che la soluzione trovata è singolare per $r=0$ e quindi bisogna andare ad analizzare cosa accade all'equazione di Green in prossimità della sorgente

Si integri allora l'eq. di Green su una sfera centrata nell'origine del sistema di riferimento, ove cioè era stata posta la sorgente impulsiva



$$\int_{\Omega(r_0)} \nabla^2 G(r)\,dV + k_0^2 \int_{\Omega(r_0)} G(r)\,dV = -\underbrace{\int_{\Omega} \delta(r)\,dV}_{=1}$$

elemento di sup

a parte
$$\int_{\Omega} \nabla^2 G\,dV = \int_{\Omega} \nabla\cdot(\nabla G)\,dV = \oint_{S(r)} \nabla G \cdot \hat{\underline{r}}\,dS$$

lemma di Green $\iiint_V \nabla\cdot\underline{A}\,dV = \oiint_{S(V)} \underline{A}\cdot\hat{\underline{n}}\,da$

$$= \int_0^{2\pi}\int_0^{\pi} \frac{\partial G}{\partial r}\Big|_{r=r_0} r_0^2 \sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

$$= \int_{\underset{\phi}{\uparrow} 0}^{2\pi}\int_{\underset{\theta}{\uparrow} 0}^{\pi} -\frac{G}{r_0}(1+jk_0r_0)\, r_0^2 \sin\theta\,d\theta\,d\phi$$

A parte

$$\frac{\partial}{\partial r}G = \frac{\partial}{\partial r}\left[a\frac{e^{-jk_0r}}{r}\right] =$$

$$= -\frac{a}{r^2}e^{-jk_0r} - jk_0 a\frac{e^{-jk_0r}}{r}$$

$$= -\frac{a e^{-jk_0r}}{r}\left[\frac{1}{r}+jk_0\right]$$

$$= -\frac{G}{r}\left[1+jk_0r\right]$$

$$= -G\left(r_0 4\pi + j k_0 r_0^2\right)4\pi = G r_0 (1 - j k_0 r_0) 4\pi$$

$$= a e^{-jk_0 r} 4\pi (1 + j k_0 r_0) \equiv \int_\Omega \nabla^2 G \, dv$$

poi:

$$\int_\Omega G \, dv = \int_0^{2\pi} \int_0^{\pi} \int_0^{r_0} G \cdot r^2 \sin\theta \, d\theta \, d\phi \, dr$$

$$= 4\pi \int_0^{r_0} G \cdot r^2 \, dr = 4\pi \int_0^{r_0} a r e^{-jk_0 r} dr$$

→ rimettiamo tutto insieme

$$a \, 4\pi \underbrace{e^{-jk_0 r}}_{1} (1 + j \underbrace{k_0 r_0}_{0}) + 4\pi a \int_0^{r_0} \underbrace{r e^{-jk_0 r}}_{d_0} dr = -1$$

si considera $\lim_{r_0 \to 0}$

$$\Rightarrow a 4\pi = 1$$

$$a = \frac{1}{4\pi}$$

$$\boxed{G(r) = \frac{e^{-jk_0 r}}{4\pi r}} \Rightarrow G(r, r') = G(r - r') = \frac{e^{-jk_0 |r - r'|}}{4\pi |r - r'|}$$

$|r - r'|$: distanza tra punto di osservazione e punto di sorgente.

Riscrivendo infine l'equazione di convoluzione tra sorgente e funzione di Green, si trova

$$\underline{A}(\underline{r}) = \mu_0 \int_V \frac{e^{-jk_0|r-r'|}}{4\pi|r-r'|} \underline{J}(r')\,dr'$$

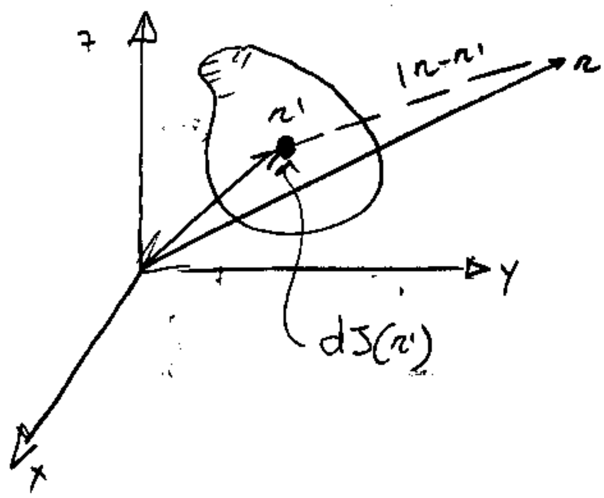
Integrale di Green

$|r-r'|$ distanza tra sorgente e punto di osservazione

Questo integrale esprime la sovrapposizione degli effetti, per cui il potenziale totale può essere visto come somma di contributi dovuti a sorgenti infinitesime impulsive poste in r'

$$dJ(\underline{r}') = J(\underline{r}')\,dr'\,\delta(\underline{r}-\underline{r}')$$

$$dA(r) = \mu_0\, G(r-r')\, J_0(r')\, dr'$$



Una formulazione analoga vale per il problema con sole sorgenti magnetiche

$$\underline{F}(\underline{r}) = \epsilon_0 \int_V \frac{e^{-jk_0|\underline{r}-\underline{r}'|}}{4\pi|\underline{r}-\underline{r}'|} \underline{M}(\underline{r}')\,dr'$$

Potenziale elettrico vettore in funzione delle sorgenti magnetiche